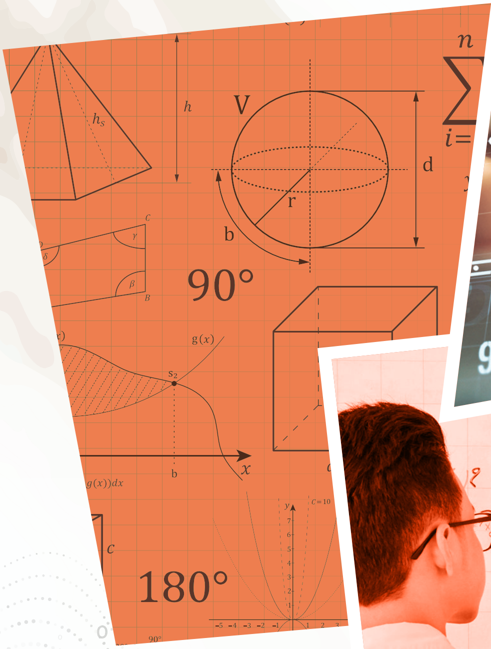
المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
Royaume du Maroc

وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵙⵏⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⵏⵏⵉⵜ

الأولمبياد الجهوية
في الرياضيات

المقرر الوطني الموحد



إصدار نونبر 2021

الأولمبياد الجهوية في الرياضيات

المقرر الوطني الموحد

تقديـــم

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

تقديم

لدواعي تربوية، يتم نشر الإصدار الأول من هذا الكتيب الخاص ببرنامج الأولمبياد الجهوية في الرياضيات في هذا الوقت من الموسم الدراسي، وترتكز هذه الدواعي بشكل رئيس على الحاجة الملحة لدعم الفاعلين الجهويين والمحليين، من بين المفتشين والأساتذة، في فهم وتملك المقاربة الأولمبية للرياضيات. هذه المقاربة التي يرجى منها، إلى جانب ما يتم تطويره من كفايات لدى جميع التلامذة في إطار تنفيذ برامج الرياضيات المدرسية، تحقيق انفتاح أكثر لفئة المتميزين من بينهم على مختلف مكونات مجال الرياضيات عموماً، ولاستنفار طعم التحدي لديهم في حل التمارين والمسائل الرياضية من النوع الأولمبي، وأيضاً لجعلهم يمرون من وضعية التلميذ(ة) المتلقي(ة) إلى وضعية المتنافس(ة) من أجل بلورة حلول رياضية غير معهودة.

وقد تم إعداد هذا البرنامج، في إطار رؤية شمولية تمتد من السلك الثانوي الإعدادي إلى السلك الثانوي التأهيلي، بنفس العناية ونفس المتطلبات والصرامة في إعداد هذا النوع من البرامج على غرار ما عملت به الدول ذات التاريخ الطويل في مجال الرياضيات الأولمبية. ولم يكن ليتأتى ذلك لولا الجهد الجدير بالثناء من قبل الفريق المركزي للأولمبياد الوطنية في الرياضيات المؤلف من خبراء - مفتشين وأساتذة مبرزين وأساتذة التعليم العالي- العاملين في وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي، والذين واكبوا إرساء وتطوير أولمبياد الرياضيات على الصعيد الوطني وأشرفوا على الرقي بمشاركة بلادنا في الأولمبياد الدولية.

فمنذ الموسم الدراسي 2020/2019، انطلق إرساء الأولمبياد الجهوية لفائدة تلامذة الثانويات الإعدادية، والتي تشكل عند إتمام عملية الإرساء، وفي إطار رؤية الوزارة الشمولية لتعزيز التميز مدخلاً لضمان نقلة نوعية نحو تحسين موقع بلدنا على خريطة مختلف مباريات الأولمبياد. ولقد كان الحرص حاضراً طيلة فترة الاشتغال حتى يتم

بسط خصوصيات الرياضيات الأولمبية وإبراز المعايير المرتبطة بها من قبيل التركيز بالأساس على المنهجية في البرنامج دون الحاجة إلى الكثير من المعرفة، وتسليط الضوء على المنهجيات الأساس (التجريب، التخمين، التخيل، اتخاذ المبادرات ...)، والتحفيز دون السقوط في فخ إحباط العزائم، وتعزيز الانشراح والثقة في النفس لجميع المتبارين بمنحهم أسباب الرضى عن الإنجازات المحققة والتوق إلى المزيد من التميز. ويتضمن هذا الكتيب العديد من المعارف والأمثلة التي أضفت على هذا العمل لمسة خاصة. لنقول اللمسة الأولمبية. ويتجلى ذلك من خلال تطبيقات كلاسيكية للرياضيات في مختلف مستويات السلك الثانوي الإعدادي لها ارتباط بما هو مقرر مدرسي، وأخرى، على العكس من ذلك، ليست واردة في المقرر الدراسي الرسمي.

في ختام هذا التقديم، لابد من أن نهنئ الفريق المركزي الذي يشرف على الأولمبياد الوطنية في الرياضيات، والمفتشة والمفتشين المكلفين بالتنسيق الجهوي لمادة الرياضيات الذين ساهموا بشكل كبير، خلال الندوتين اللتين أشرفنا على تنظيمهما شهر أكتوبر من سنتي 2019 و 2021. من خلال المناقشة المستفيضة والتقاسم المثمر حول المحاور الأساس لهذا المقرر الأولمبي ولفت الانتباه حول متطلبات إنجازه وضرورة مواكبة الفاعل المحلي في اكتساب الخبرة الضرورية لاستيعاب وتطوير كفاياته في مجال التأطير الأولمبي.

فبفضل هؤلاء جميعاً، يقدم هذا الكتيب لجميع مدرسات ومدرسي الرياضيات في الثانويات الإعدادية رصيداً من الموضوعات الكفيلة من جهة بتحقيق الإثارة والتشويق لدى التلميذات والتلاميذ المعنيين، اعتماداً على الهدف المحدد في مختلف محاور الرياضيات الأولمبية، ومن جهة أخرى بمساعدة الأستاذ-المؤطر على إبداع وضعيات أصيلة.

إنه عمل قيم، يؤسس لانطلاقة نوعية على مستوى مباريات الأولمبياد في الرياضيات.

والله ولي التوفيق

المكلف بتدبير مجال تشجيع التميز
ذ. محمد ستيتو

مدخل عام

في إطار تعزيز برنامج الأنشطة والمباريات الهادفة إلى حفز التلميذات والتلاميذ على التفوق الدراسي وتشجيع التميز في مختلف المواد الدراسية بجميع المستويات الدراسية لسلك التعليم الثانوي الإعدادي، وتأسيساً على التطور المسجل خلال السنوات الأخيرة على مستوى مسار الأولمبياد الوطنية في الرياضيات بسلك التعليم الثانوي التأهيلي، وعلى الاهتمام الذي أضحت تعرفه الأنشطة المنظمة في إطارها من طرف التلميذات والتلاميذ وأوليائهم، وسيراً على نهج البلدان الرائدة في هذا المجال والذي يتمحور حول الكشف المبكر عن الطاقات الحاملة لبذور النبوغ في الرياضيات وتمكينها من التأطير والمواكبة، واعتباراً للأدوار التربوية للأولمبياد في الرياضيات كتظاهرة علمية وآلية للارتقاء بمشاركة بلادنا في التظاهرات الدولية، والآثار الإيجابية التي تخلفها المنهجية المعتمدة في انتقاء وتأطير التلميذات والتلاميذ ضمن مسارها، تم الشروع ابتداء من الموسم الدراسي 2019-2020 في إرساء أنشطة أولمبية في الرياضيات، تحت إشراف الأكاديميات الجهوية للتربية والتكوين، تنتظم في إطار «الأولمبياد الجهوية في الرياضيات» وتستهدف تلميذات وتلاميذ السلك الثانوي الإعدادي المتميزين. وجدير بالإشارة من جهة، إلى أهمية الأدوار المنوط بمختلف الأطراف المعنية القيام بها على صعيد الجهة ضماناً لإنجاح عملية الإرساء والاستدامة والتطوير، ومن جهة أخرى إلى العلاقة العضوية الواجب استحضارها بين كل من الأولمبياد الجهوية والأولمبياد الوطنية التي تسهر المصالح المركزية على تنظيمها.

وتندرج وثيقة «منهاج الرياضيات الأولمبية» الخاصة بالسلك الثانوي الإعدادي، في إطار مواصلة الجهود الهادفة إلى تسهيل الإرساء وتطوير كفايات المدرسين وتعزيزها في هذا المجال من أجل نشر الثقافة الأولمبية والرفع من مستوى آداء تلامذتنا في مختلف المنافسات.

وتستند هذه الوثيقة على استثمار مختلف التجارب والتراكمات التي تم اكتسابها عبر مساري الأولمبياد الوطنية والدولية والتي مكنت من تشخيص وتحديد المستلزمات الضرورية التي ستمكن من توحيد تمثلات جميع الفاعلين حول متطلبات العمل

الرياضياتي الأولمبي وبالتالي تمكينهم من اكتشاف المتميزين من التلاميذ وتسهيل عملية انخراطهم في هذا المسار وتوفير تأطير ملاءم يمكن من تحسين ترتيبنا على المستوى الدولي.

وتهدف هذه الوثيقة إلى أن تكون أداة عمل وظيفية تمكن مختلف المتدخلين من تعرف منطلقات المنهاج الأولمبي وضبط مكوناته وتنفيذ أنشطته، وتمكن – تبعا لذلك – من تنمية كفايات التلاميذ ومهاراتهم، وإكسابهم القدرة على تكييفها مع مختلف المواقف والوضعيات. كما أن الوثيقة تمثل، فضلا عما سبق، منطلقا مرجعيا يعرض العناصر والمكونات العامة لمختلف الأنشطة المنتظر إنجازها من قبل المؤطر(ة)، وما يرتبط بها من وسائل وطرائق وإجراءات، مما يسهل وضع الشبكات الملائمة لتأطير جيد وانتقاء أفضل.

وقد تم تصميم وثيقة **«مقرر الرياضيات الأولمبية الخاص بالتعليم الثانوي الإعدادي»** في ضوء اختيار منهجي يواكب المتطلبات المعرفية والمهاراتية اللازمة، منطلقا في ذلك من الاستثمار الوظيفي لأبرز ما تم استخلاصه من تجربة التأطير في مسار الأولمبياد الوطنية وحاجيات المشاركة الفعالة في الأولمبياد الدولية خاصة ومن نتائج اليوم الدراسي الذي نظم مركزيا بمشاركة السادة المفتشين الجهويين لمادة الرياضيات، باستحضار بعد المحتويات المستمدة من حقول المعرفة الرياضياتية الأولمبية بصورة عامة، مع اعتماد مقاربة شمولية ومتكاملة تراعي مبدأ التوازن بين جميع الأبعاد (البعد الاجتماعي الوجداني، بعد مكتسبات الرياضيات المدرسية، المهارات والكفايات، البعد المعرفي، البعد التجريبي والتجريدي، البعد الجمالي...)، وبين مختلف أنواع المعارف وأساليب التعبير (فكري، فني، جسدي)، وبين مختلف جوانب التكوين (نظري، تطبيقي عملي) .كما أن الوثيقة تستحضر بصفة خاصة مراكز اهتمام التلاميذ المتفوقين في المرحلة العمرية التي يمرون بها، وكذلك خصوصيات التعلمات بالطور الثانوي الإعدادي ومدى ملاءمتها لحاجيات مختلف التعلمات الأولمبية.

1 - مكونات برنامج الرياضيات الأولمبية :

يتكون برنامج الرياضيات الأولمبية من أربعة مجالات وهي: الهندسة والجبر ونظرية الأعداد والتركيبات:

- يعد مجال الهندسة في المستوى La géométrie synthétique من بين المجالات التي تحظى باهتمام متزايد في مباريات الأولمبياد الدولية، فالمسائل المتعلقة بها تكون حاضرة بشكل شبه دائم في مواضيعها وهو ما يمكن اعتباره مؤشرا على أهمية الهندسة ضمن التوجهات الدولية. لذلك فالشروع في تدريب المتعلم(ة) المتعلمة على حل مسائل هذا المجال في المراحل المبكرة من الإعداد الأولمبي، يكتسي أهمية كبيرة.

- وتجدر الإشارة إلى أن الهندسة الأولمبية تروم حل مسائل هندسية صرفة وذلك باستعمال تحويلات وإنشاءات هندسية دون الاعتماد على أدوات الهندسة التحليلية التي يجب تجنبها ما أمكن ذلك.

- يعد مجال الجبر L'algèbre من بين المجالات التي ترتبط بعدد من التعلمات المدرسية، إذ نجد أن مكوناتها تهم على سبيل المثال لا الحصر، الدوال العددية والمتتاليات والحدوديات وكذلك تحديد جذور المعادلات والعلاقة بين المعاملات وحل النظمات وحل معادلات دوالية...إلاّ أن هذه المعارف بمفردها لا تكفي لحل المسائل المقترحة حيث يجب اكتساب جملة من المهارات والتقنيات كتوظيف الاستدلالات الرياضياتية وتقنيات التعميل كأدوات يجب ضبطها جيداً وتوظيفها بشكل محكم في حل وضعيات غير اعتيادية.

- تعد نظرية الأعداد La théorie des nombres مجالاً شاسعاً يهتم بالأنشطة المتعلقة بالأعداد الصحيحة النسبية والأعداد الجذرية، وحل معادلات ديوفانتية معاملاتها أعداد صحيحة نسبية أو جذرية... وتشكل الأعداد الأولية لبنات أساسية لبناء جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية من خلال المبرهنة الأساسية للحسابيات وتطبيقاتها المتعددة.

- التراكيب La combinatoire تهتم بدراسة مختلف التشكيلات المرتبطة بتجميعات منتهية لموضوعات أو أشياء أو بتأليفات وترتيبات لعناصر أو أجزاء مجموعات منتهية وبكل ما يتعلق بالتعداد. وقد لا تتطلب تلك الدراسة استعمال أدوات رياضياتية

معقدة، فجل الوضعيات التركيبية تكون مرتبطة بتشكيلات واقعية ومألوفة تتطلب فقط وضع خطاطات واستراتيجيات تمكن من الوصول إل الحل دون الحاجة إلى استحضار واستنفار معارف رياضياتية جديدة.

والتراكيب مجال جد شاسع يربط بين مختلف فروع الرياضيات، حيث نجد التراكيب التعدادية والتراكيب الحساباتية والتراكيب الجبرية والتراكيب التحليلية والتراكيب الاحتمالاتية والتراكيب الهندسية والتراكيب المرتبطة بنظرية المبيانات La théorie des graphes......

تلعب المكتسبات المتقدمة للمتبارين في التراكيب دوراً أساسياً وحاسماً في ترتيب الدول خلال منافسات الأولمبياد الدولية، بالنظر إلى وجود تفاوت كبير بين الدول المشاركة في إدماج هذا المكون ضمن مناهجها الدراسية لمختلف الأسلاك التعليمية.

تجدر الإشارة كذلك إلى أن المجالات الأربع المكونة للرياضيات الأولمبية ترتبط فيما بينها، حيث يمكن طرح مسألة خاصة بأحد المجالات لكن حلها يتطلب توظيف معارف خاصة بمجال آخر. ومن بين المميزات الأساسية للمسائل الأولمبية المقترحة هي تحكم معياري درجة الصعوبة وبُعد الجمالية، وفي هذا الصدد يتم اعتبار وتقييم كل محاولة يقوم بها المتباري في اتجاه الحل بارتباطها مع الاستراتيجية المؤدية له، كما يتم تمييز كل طريقة حل تتسم بالسلاسة والجمالية.

2 - كيف يمكن تقديم أنشطة الرياضيات الأولمبية؟

إن فكرة جعل التلميذ في وضعية وتركه منذ الوهلة الأولى أمام محاولة حل تمرين أولمبي هي ممارسة محفوفة بالمخاطر حيث يمكنها أن تقود إلى حالة الإحباط المرتبط بشكل وثيق بالإحساس السائد لدى التلامذة كلما تعلق الأمر بعمل معقد يتجاوز قدراتهم. فبعكس ذلك، يستحسن أن يقدم الأستاذ حصة غير مخصصة حصريا لحل مسألة، وذلك باعتماد تدريب أولي للتلامذة، يساعدهم على بناء خطط ووسائل متماسكة ومساعدة على إنتاج طرق للبحث. والمقصود بذلك، **تدريب التلميذ(ة) على استعمال المنهج العلمي في مباشرة بحثه عن حل مسألة أولمبية.**

ننطلق إذن من مبدأ تخصيص وقت خارج وسابق لحصة تقديم مسائل الأولمبياد للتلاميذ، يتم خلاله تعرف وتطبيق المراحل الأربعة المتعارف عليها في المنهج العلمي وهي: التملك والبحث والاسترداد والتثمين.

• مرحلة تملك نص المسألة :

وهي مرحلة أساسية يأخذ فيها تفاعل التلميذ(ة) مع الأستاذ كل أبعاده، لكونها منطلق حاسم لمباشرة جيدة لحل المسألة. فهذه المرحلة ترتكز على عنصرين رئيسيين هما **«القراءة المتأنية والنشطة» و«التواصل /التعبير الشفهي».**

- **فالقراءة** هي الخطوة الأولى لتملك النص الرياضياتي. لذلك يتعين على المؤطر أن يقرأ النص على التلامذة وأن ينبههم إلى أن القراءة الأولى لا تكون عادة كافية لفهمه بل يجب قراءته عدة مرات من أجل ضبط كل مكوناته، فبعض النصوص تحتوي على عناصر ضمنية يجب على التلامذة الانتباه إليها من أجل امتلاكها لكي تصير أدوات جاهزة للاستعمال.

- والمقصود **بالتواصل** هو الحوار والمناقشة من أجل فهم دقيق للنص، ويعتبر الخطوة الثانية اللازمة لتملك النص. هنا، يتعين على المؤطر أن يؤسس لحوار مع التلامذة من خلال تطرقه إلى مجال الرياضيات الذي تنتمي إليه المسألة المطروحة وذلك لإضفاء الشرعية على بحثه بإبراز أنه يدخل في نطاق رياضياتي أوسع مما درسه التلميذ(ة) في القسم. كما يتعين على المؤطر تهييئ أسئلة دقيقة وهادفة بناء على قراءته القبلية لنص المسألة وأن يعمل بموازاة مع ذلك على خلق جو من الثقة والإيجابية تشجيعا للتملك السلس للنص.

فالهدف من هذا الحوار هو رفع أي غموض أولبس في فهم نص المسألة واستخراج جميع العناصر الأساسية المكونة له بما فيها التعليمات الصريحة والضمنية مما سيساعد على وضع منطلقات وخطط جيدة للبحث. وتيسيرا للعمل، بمكن للأستاذ(ة) أن يكتب نص المسألة على السبورة وأن يعمد وبتفاعل مع تلامذته إلى التسطير تحت بعض الجمل، إضافة أسهم، تلوين الأفعال الدالة على التعليمات إلخ.. هكذا يصبح النص بمثابة كائن تعرض لمعالجة حقيقية ليصبح في الأخير جاهزاً للاستعمال.

- **مرحلة البحث: يمكن تقسيم هذه المرحلة إلى عدة مستويات.**

- **على مستوى التطبيق:** يشكل الاعتماد على أوراق التسويد مركز هذا المستوى. حيث يجب على التلميذ أن يعرف بأن المنتظر منه في ورقة التحرير هو عمله النهائي، لذلك يتعين عليه تقديم ورقة خالية ما أمكن من التشطيبات، تتضمن بوضوح المراحل المعتمدة في الإنجاز ونتائج نهائية مؤطرة بعناية. فتنبيه التلميذ(ة) إلى استعمال أوراق التسويد قبل نقل العمل على أوراق التحرير سيجعله يفهم بأن الجواب المطلوب منه ليس جوابا آنياً بل يتطلب مهلة مهمة للبحث. كما ينبغي أن يتعود تثمين كل الأفكار التي يتوصل إليها في أوراق التسويد التي يمكن اعتمادها أيضاً من طرف المصححين.

- **على مستوى المضمون:** كتابة النتيجة لوحدها على ورقة التحرير ليس هو الجواب المطلوب. فعلى التلميذ(ة) أن يعي بأن المنتظر منه هو إبراز مختلف التبريرات الرياضياتية وعناصر الطريقة المستعملة في الوصول إلى الجواب.

- **أهمية الأسئلة الأولى:** إذا كانت المسألة مكونة من عدة أسئلة، يجب تنبيه التلميذ(ة) إلى التركيز جيداً على الأسئلة الأولى لأنها عادة تمكن من تملك المسألة مما يسهل التطرق إلى الأسئلة الصعبة الموالية. يجب إذن تعويد التلميذ(ة) على معالجة الحالات الخاصة والانتقال بعد ذلك إلى التعميم.

- **إعادة القراءة:** يتعين على الأستاذ(ة) حث تلامذته على إعادة مراجعة العمليات الحسابية المستعملة والتأكد من أن أجوبته تنسجم مع الواقع ومع الوضعية المدروسة. حيث ننمي لدى التلميذ(ة) كفاية التقدير وقدرات الضبط والمراقبة الذاتية.

- **تشجيع التلميذ(ة) على الإنتاج:** خلال هذه المرحلة من البحث، فإن دور الأستاذ(ة) حاسم فقط في مساعدة تلامذته الذين وجدوا صعوبة في مرحلة التملك. يبقى البحث الشخصي للتلميذ(ة) هو الغاية والهدف، لدى يتم تشجيعه بعيداً عن أي توجيه قد يحثه على استعمال طرق آلية غير مبدعة، من شأنها أن تعيق عمل وإنتاج التلامذة الذين ليسوا مؤهلين كفاية بالمفاهيم الرياضياتية القبلية. وحيث أن كل تلميذ(ة) يتطور ارتباطا بمستوى معارفه الرياضياتية، فإن الفكرة الرئيسية تبقى هي العمل على مسائل لا تتطلب استنفار الكثير من الأدوات الرياضياتية بقدر ما يكون المطلوب هو التوصل لإبداع حل للمسألة بأدوات مفاهيمية وطرق أولية .

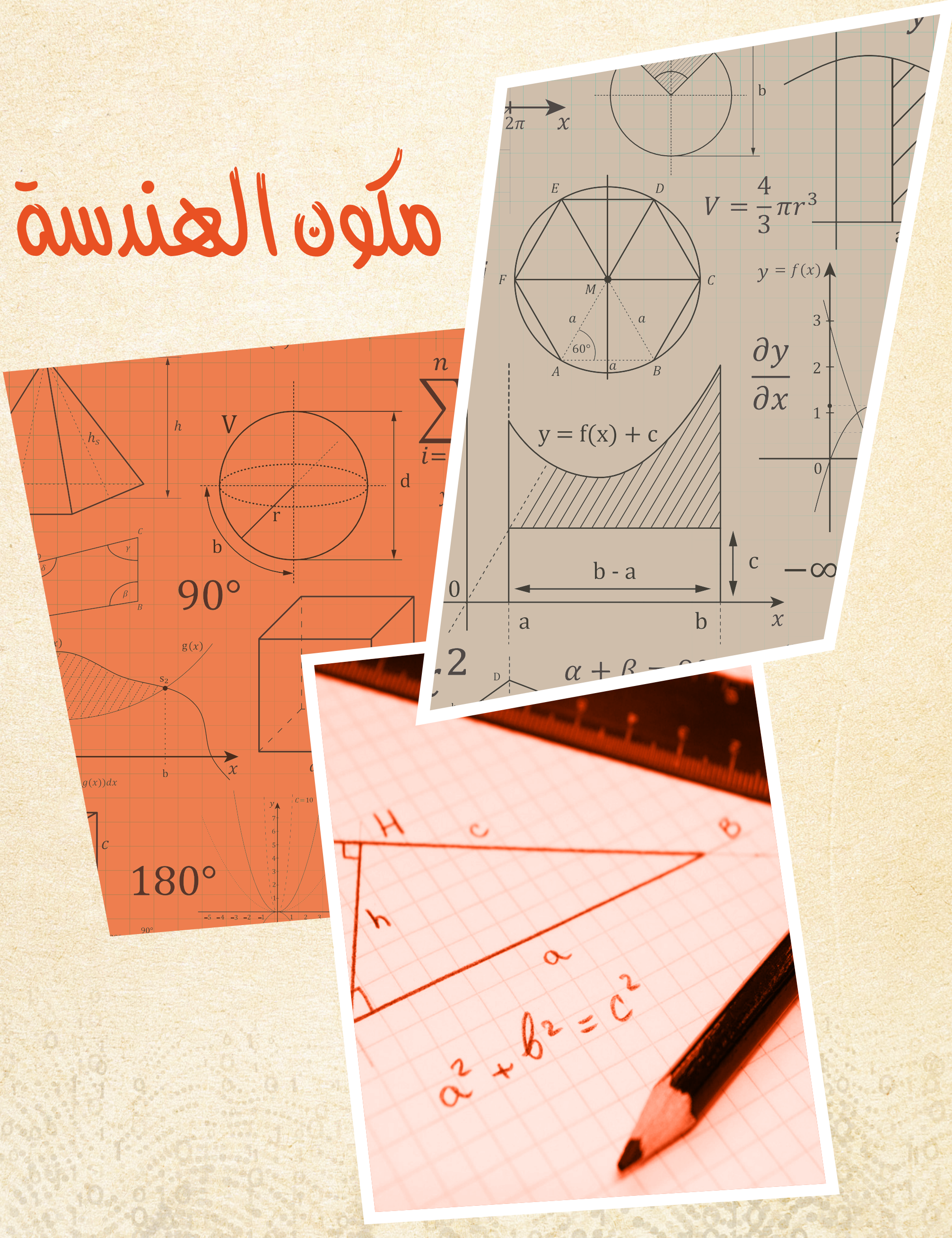
• **مرحلة الاسترداد :** مرحلة الاسترداد الناجعة هي تلك التي تمتلك فيها المسألة المطروحة طريقتين أو ثلاثة للحل. يتعين هنا مساعدة وتشجيع التلامذة على إبراز مواهبهم من خلال إبراز الطابع الإبداعي أو المتميز لكل طريقة مقترحة.

• **مرحلة التثمين :** في هذه المرحلة، يتعين إجراء دمج مفيد لإنتاجات التلامذة والتي يجب إيلاءها كل الاهتمام. وعملية التصحيح تجرى بتفاعل وبناء مشترك معهم بأمل إيصال فكرة أن الطرق المعتمدة في الحل ماهي إلا جزء من طرق عدة أخرى مؤدية إلى الحل.

وتعطى الأهمية خلال هذا الوقت المخصص لتقديم الأولمبياد إلى تنمية الكفايات، حيث أن مرحلة التثمين سوف لن تخصص فقط إلى إعادة تناول مفاهيم الدرس المرتبطة بالمسألة بل ستتعداه إلى إبراز مختلف الطرق المستعملة في الوصول إلى هذا الحل.

واعتباراً لأن حصص أنشطة الأولمبياد تتطلب وقتاً مهماً للإنجاز وسعياً إلى إنجاح تفعيل مضامين المذكرة الخاصة بالأولمبياد الجهوية، فإن إحداث نوادي للأولمبياد داخل المؤسسات من شأنه أن يوفر الفضاء والوقت الكافي للعمل ويساهم في خلق أجواء ملائمة للنهوض بثقافة الرياضيات الأولمبية، حيث سيجد فيه كل موهوب ومتعطش لتعلم رياضيات التحدي ضالته، وسيساهم ذلك كله بالارتقاء بتدريس الرياضيات بمنظومتنا التعليمية.

مكون الهندسة



مكون الهندسة

مكون الهندسة

إن حل مسائل الهندسه لا يتطلب معارف مدرسيه متقدمه، فتقنيه ملاحقة الزوايا المتقايسة (Chasse aux angles) مثلاً، تمكن من دراسة طيف شاسع من الوضعيات المتعلقة بدروس الهندسة التي يتم تناولها في مستويات الثانوي الإعدادي الثلاثة. وحرصاً على انسيابية المفاهيم وتكاملها خلال مسارَيْ الأولمبياد بسلكيْ الثانوي الإعدادي والتأهيلي، فإن دراسة المحتويات المؤثثة لمكون الهندسة في المقرر الأولمبي، سيتم بالتدرج في جزئه الأول بالنسبة لسلك الثانوي الإعدادي وبموازاة مع التداريب الوطنية في جزئه الثاني بالنسبة لسلك الثانوي التأهيلي، حيث يتم الارتقاء بتلك التعلمات وتعميقها بتناسب مع ما سيكتسبه التلاميذ من مفاهيم وأدوات جديدة. فعلى سبيل المثال، تم إدراج التحويلات الهندسية على مراحل، حيث يتم في مرحلة أولى، تناول أولي للإزاحة والتماثل والتحاكي الذي يتم تناوله ضمنياً، ثم بشكل معمق في قسم الجذع المشترك العلمي بالإضافة إلى الدوران والتعاكس والتشابه في مرحلة التدريب الخاص بالثانوي التأهيلي، وفي السياق ذاته تم تقديم مفهوميْ استقامية ثلاث نقط وتلاقي ثلاثة مستقيمات، قبل تقديم مبرهنتيْ **سيفا ومينالوس**، قصد إفساح المجال لتوظيف خاصيات الزوايا للبرهنة على مسائل الاستقامية والتلاقي. كما يتم أيضاً تقديم مجموعة من المعارف المتداولة مثل دائرة النقط التسع والتطرق لخاصياتها الهندسية بالتدرج Théorème de Feuerbach مثلاً، مستقيم Euler الذي يمر من مركز تعامد مثلث ومركز ثقله ومركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث، قوة نقطة وخاصياتها، التزاوي Isogonalité وخاصياته، مبرهنات Miquel، خاصيات مماثل المتوسط بالنسبة للمنصف الداخلي لزاوية من زوايا مثلث (symédiane)... . ولقد تم الحرص، من جهة أخرى، على مد

الجسور بين تعلمات الهندسة الإقليدية والهندسة الإسقاطية "Géométrie projective" للتعامل مع مسائل هندسة المسطرة، حيث سيتم تناول مفاهيم جديدة مثل الحزمة التوافقية، والقطب Pôle والمستقيم القطبي Polaire وربط كل هذا مع خاصيات التعاكس Propriétés de l'inversion، وذلك من أجل تمكين التلاميذ في المراحل المتقدمة للإعداد الأولمبي من اكتساب أدوات وتقنيات فعالة قد تساعدهم على حل مسائل صعبة بطرق مختصرة.

1- توجيهات منهجية

- **بالنسبة للمؤطر(ة):** إن إعداد وهندسة الأنشطة وتجميع الأفكار الكبرى أثناء تأطير التلاميذ ومواكبة اكتسابهم لمختلف القدرات، يستحسن أن يتم وفق منهجية التصنيف في شبكة تشكيلات هندسية مترابطة، بهدف مساعدة التلميذ(ة) على التذكر وتركيز قدر كبير من النتائج والمبرهنات باعتماد خرائط ذهنية مع الحرص بقدر الإمكان على تدريب المتعلمين على الاهتمام بالبراهين واستخلاص الأفكار الكامنة وراءها لاستثمارها لاحقاً، دون الوقوع في شرك التنميط، لأن لكل وضعية اختبارية جانباً ودرجة من الجدة ينبغي الكشف عنها يوم التباري في المنافسات الأولمبية.

- **بالنسبة للتلميذ(ة):** ينبغي على التلميذ(ة) التدرب على إنجاز أشكال دقيقة -قدر الإمكان- باليد المجردة، مستحضراً الخاصيات الهندسية المؤطرة لها، وذلك لأخذ فكرة أولية عن المشكلة المطروحة وفهمها في منأى عن أي غموض، ثم الانتقال بعد ذلك، لإنشاء شكل هندسي بمقاس واضح، باستعمال قلم رفيع ومسطرة غير مدرجة وبركار، مع الحرص على تفادي الحالات الخاصة. لذا ينبغي أن يتدرب التلاميذ على إنجاز أشكال هندسية دقيقة لفترة طويلة قبل اختبارات التباري مع الأقران. كما ينبغي أن يبدأ

التلميذ(ة)، بعد إنجازه للشكل، أول وأهم مراحل بناء الحل حيث يقوم بتحليل الوضعية وباستخلاص أكبر قدر ممكن من المعطيات والنتائج، وذلك عبر استكشاف الزوايا المتقايسة، أو رصد ثلاث نقط مستقيمية أو أربع نقط متداورة، أو غالبًا بإكمال أجزاء غير موجودة/مشار إليها/ممثلة كإنشاء نقط أو مستقيمات جديدة قد تكون مرتكزًا لحل المسألة. وتعتبر مرحلة التحليل حاسمة للنجاح في الحل لأن الصعوبة تكمن في إيجاد تلك المراحل الوسيطة وغير المذكورة في المعطيات ثم الربط بينها، خلافًا للوضعيات المدرسية الاعتيادية. ويبرهن التلميذ(ة)، بعد ذلك، على جميع المراحل الوسيطة (التمهيدات Lemmes) من خلال استحضار الخاصيات المناسبة وتعليلها بشكل كامل، ليقوم في الختام بتوليف الحل وصياغته مع التحقق من عدم إغفال شروط الحالة العامة.

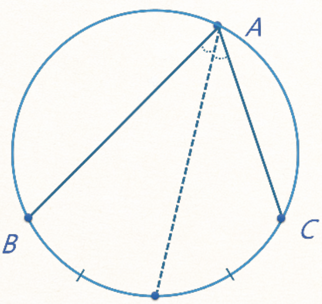
2- القدرات المنتظرة من المقرر الأولمبي لمكون الهندسة

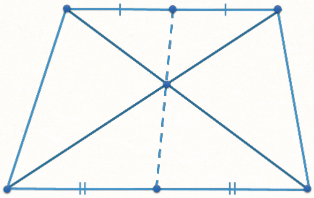
بتحليل مضامين التوجيهات التربوية يتبين أن الهندسة تحتل في المقررات الدراسية بالتعليم الثانوي الإعدادي أهمية من حيث عدد الساعات المخصصة لها حيث يبلغ هذا العدد، على سبيل المثال، بالنسبة لمستوى الأولى ثانوي إعدادي ما مجموعه 72 ساعة من إجمالي 148 ساعة. وفي علاقة بما تم إنجازه من أنشطة الهندسة المقررة في السنوات الثلاثة، نجد في الجدول التالي صياغة لمحتوى المقرر الأولمبي مع وصف موجز لأهم القدرات المنتظرة. وعملاً على ترصيد التعلمات المدرسية واستثمارها في المقرر الأولمبي، نقتصر ضمن هذا الأخير على إرساء المفاهيم التي كانت موضوعًا لمكتسبات سابقة والارتقاء بها من خلال تقوية أنشطة البرهنة والإغناء (الإنشاءات الهندسية، على سبيل المثال، كانت موضوع تعلمات في

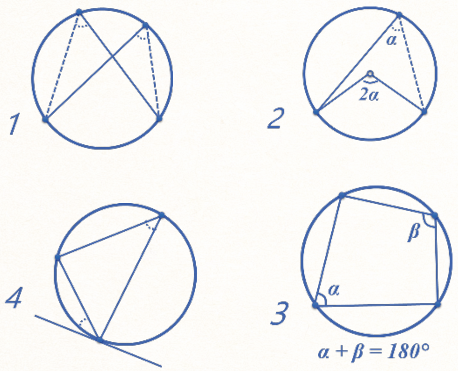
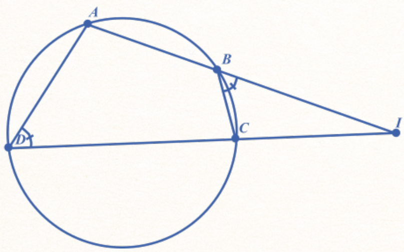
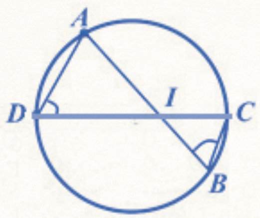
السنة السادسة ابتدائي). كما تم إدراج بعض التعميمات، التي لا يتطلب تقديمها معارف جديدة، والتي يؤدي توظيفها إلى استنتاجات هامة، ستشكل أدوات مرجعية للتعامل مع مسائل تمهيدية من مستوى الأولمبياد. يتم تدريب المتعلمين من خلال محتويات هذا الفصل لجعلهم، على سبيل المثال لا الحصر، قادرين على:

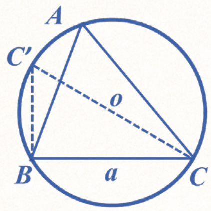
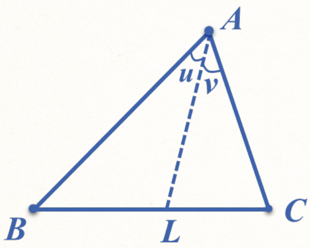
G1	إثبات تعامد / توازي مستقيمين.
G2	إثبات تلاقي ثلاثة مستقيمات في المستوى (باستعمال حالة المستقيمات الهامة).
G3	إثبات استقامية ثلاث نقط(حالات بسيطة).
G4	توظيف المثلثات المتقايسة / المتشابهة في حل مسائل.
G5	توظيف خاصية الوترين المتقاطعين.
G6	توظيف التماثل / الإزاحة في حل مسائل متنوعة.
G7	إثبات تداور أربع نقط واستعمال خاصيات الرباعيات الدائرية.

جدول محتويات المقرر الأولمبي لمكون الهندسة

المستوى	المحتوى	توجيهات
السنة أولى إعدادي	- خاصيات المستقيمات الهامة في مثلث وخاصياتها: الارتفاعات، الواسطات، المنصفات، مركز تعامد مثلث. - الدائرة: المركز، الوتر، القطر، المماس في نقطة، الدائرة المحيطة بمثلث، الدائرة المحاطة بمثلث.	- يتم استثمار الخاصيات التالية: المتفاوتة المثلثية - المتفاوتات التي تربط قياس زاوية في مثلث، بقياس طول الضلع المقابل. الخاصية المميزة لمنصف زاوية - خاصيات تلاقي ارتفاعات ومنصفات وواسطات مثلث - خاصيات زاويتين متحاذيتين وزاويتين متتامتين وزاويتين متقابلتين بالرأس. كما يتم تعرف بعض خاصيات هندسة المثلث تدريجياً، وتقديم برهان عليها كلما كان ذلك ممكنا، مثلاً مماثلة مركز تعامد مثلث بالنسبة لأحد أضلاعه (أو بالنسبة لمنتصف ضلع) نقطة تنتمي للدائرة المحيطة بالمثلث. (يلاحظ التلميذ حالة المثلث القائم).
	- المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{BAC}$ وواسط القطع[BC] يقطعان القوس التي طرفاها B وC، والتي لا تمر من النقطة A، في منتصف هذه القوس.	- يتعرف التلميذ، من خلال إنشاء المنصف والواسط فيلاحظ ويبرهن، تبعاً لمكتسباته. 
	- خاصيات مستقيمين متوازيين وقاطع لهما؛ - التحويلات الاعتيادية: التماثل المركزي.	- يشكل التماثل المركزي أداة قوية يمكن استثمارها إلى حد بعيد في حل مسائل متنوعة بتوظيف خاصياته المتمثلة في الحفاظ على المسافة /الاستقامية /الزوايا.

	-الرباعيات الخاصة	- يمكن التعامل مع التماثل المحوري باعتباره مفهوما تم التطرق إليه في سلك التعليم الابتدائي.
السنة ثانية إعدادي	- خاصيات شبه المنحرف - المستقيمات الهامة في مثلث تتمة: المتوسطات - مركز ثقل مثلث؛ - المستقيم المار من منصفي ضلعي مثلث. - مستقيم يوازي ضلع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين. - خاصية المثلث قائم الزاوية والدائرة، - مبرهنة فيتاغورس المباشرة. - التحويلات الهندسية: التماثل المحوري، الإزاحة.	- تحديد طول قطعة منتصفي الضلعين غير المتوازيين. - مبرهنة Steiner في شبه منحرف: تقاطع القطرين ومنتصفا الضلعين غير المتوازيين نقط مستقيمية.  - المستقيم المار من تقاطع القطرين وتقاطع الضلعين غير المتوازيين يمر من منتصفي الضلعين المتوازيين. يتم تناول وضعيات هندسية توظف الموضع النسبي لمركز الثقل على كل متوسط (مثلاً إنشاء مثلث إذا علم طول قاعدته وطولا المتوسطين المارين من طرفيها). -توظيف مبرهنة طاليس المباشرة في وضعية خاصة، حيث يقطع مستقيم ضلعا مثلث ويوازي الضلع الثالث. - يتم استعمال التحويلات الهندسية كأداة لحل مسائل هندسية متنوعة، وبصفة خاصة لإنجاز إنشاءات هندسية وتحديد محلات هندسية lieux géométriques.

السنة ثالثة إعدادي	-مبرهنة طاليس (المباشرة والعكسية)؛ - مبرهنة فيتاغورس (المباشرة والعكسية)؛ - تعرف المثلثات المتقايسة والمتشابهة. - الزوايا المحيطية في دائرة. - الرباعيات الدائرية . الخاصية المباشرة والعكسية. - خاصية الوترين [AB] و[CD] المتقاطعين في نقطة I، $IA \times IB = IC \times ID$	- يتم تناول الحالات الثلاث في تشكيلات بسيطة وأخرى مركبة، وإبراز دورها الهام في حل طيف شاسع من المسائل. -في كل مثلثين متشابهين قياسات الأضلاع المتناظرة وكذلك بالنسبة (للارتفاعات والمتوسطات والمنصفات) - إضافة خاصية مماس الدائرة المحيطة بالمثلث ABC عند أحد رؤوسه واستعمالها في حل المسائل. - تناول التشكيلات الهندسية الأربع التالية:   

	- مبرهنة الجيب في مثلث حيث R شعاع دائرته المحيطة $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{1}{2R}$ -خاصية نسبة مساحتي مثلثين: لتكن L نقطة من القطعة [BC]، u و v هما قياسا الزاويتين $\widehat{BAL}$ و $\widehat{LAC}$ لدينا: $\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}}=\frac{\sin u}{\sin v}\times\frac{AB}{AC}$ - حالة خاصة مبرهنة منصف زاوية لدينا: إذا قطع منصف الزاوية المار من A القطعة [BC] في L فإن: $\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}}=\frac{AB}{AC}$	- يمكن البرهنة على هذه النتيجة باستعمال تعريف الجيب في مثلث قائم الزاوية وتره قطر للدائرة، كما يتضح ذلك في الشكل التالي:  

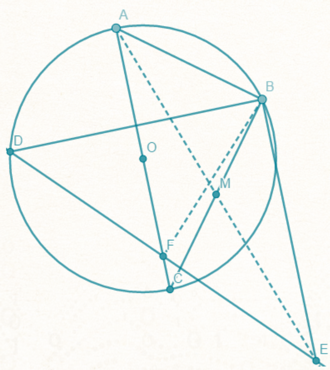
3- أمثلة لوضعيات تستهدف تنمية القدرات المنتظرة

يتم تناول وضعيات متدرجة الصعوبة، وتنجز حلولها هندسياً، مع توجيه التلاميذ إلى تفادي الإحداثيات والمعلم، والبحث عن براهين بسيطة، مع إتاحة فرص للاستئناس ببعض الخاصيات والتقنيات من خلال استعمالها، مرات متعددة، حتى يتعودها التلاميذ كأدوات ملهمة لحل مسائل صعبة، واضعين نصب أعينهم بأن كل خاصية هندسية إنما تكتسب أهميتها عندما يتم استعمالها كأداة لحل مسألة. مثلاً ينبغي استكشاف الخاصية التالية في مثلث قائم الزاوية وتطبيقها: طول متوسط الزاوية القائمة يساوي نصف طول الوتر.

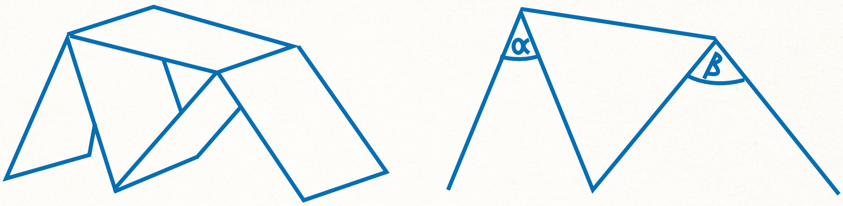
نعتبر مثلثاً ABC قائم الزاوية في B. D مماثلة B بالنسبة للمحور (AC) وM منتصف القطعة [BC]. و E مماثلة A بالنسبة للنقطة M. بين أن (AC) يمر من منتصف [ED]

جواب. بعد تحليل الشكل بقراءة متأنية نستنتج أن المثلث EBD قائم الزاوية في B لأن ACEB متوازي أضلاع وبالتالي (BD) عمودي على(BE) لأن (BD) عمودي على(AC).لتكن F تقاطع (AC) و[ED].

وبما أن F تنتمي إلى واسط [BD] فإن FB=FD . باستعمال الخاصية أعلاه نستنتج أن FD=FE أي أن F منتصف الوتر [ED].

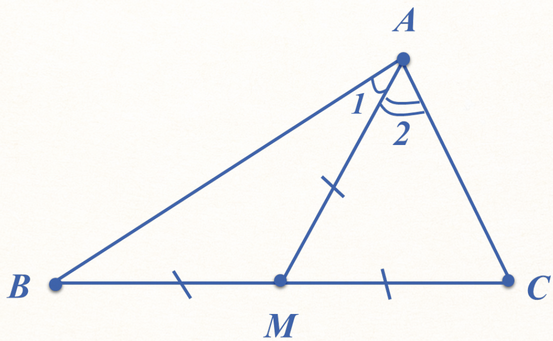


ننشئ باستعمال خمس بطاقات متطابقة، التشكيلة ثلاثية الأبعاد، في الصورة عن يسارك. أحسب مجموع الزاويتين الموضحتين في مقطع الصورة عن يمينك.



جواب. نجد باستعمال مجموع زوايا رباعي وملاحظة مثلث متساوي الأضلاع ومثلثين متساويي الساقين أن $\alpha+\beta=120^\circ$

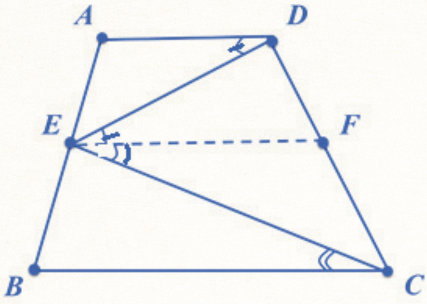
بيّن أنه إذا كان $MA = MB = MC$ فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A .



جواب: نستعمل خاصية تساوي قياسي زاويتي القاعدة في المثلثين MAB وMAC متساويا الساقين. علماً أن مجموع قياسات زوايا مثلث تساوي 180° منه نستنتج أن الزاوية قائمة في A .

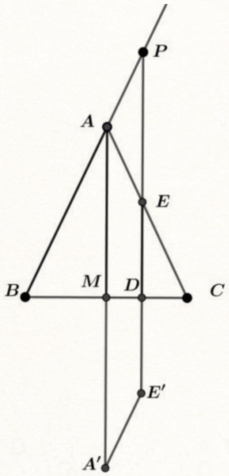
ليكن ABCD شبه منحرف قاعدتاه[AD] و[BC]. لتكن E نقطة ما من [AB] .

بيّن أن $\widehat{CED}= \widehat{ADE} + \widehat{BCE}$



جواب: هذا التمرين يبرز أهمية إضافة نقط أو مستقيمات مساعدة في الحل، بإنشاء المستقيم المار من E والموازي لـ (BC)، ثم استعمال خاصيات زوايا محددة بمستقيمين متوازيين وقاطع لهما (انظر الشكل أعلاه).

ليكن ABC مثلثاً متساوي الساقين في A وM منتصف القطعة [BC]. لتكن P نقطة من نصف المستقيم [BA) ، مختلفة عنB و D مسقطها العمودي على (BC)، المستقيم (PD) يقطع [AC] في النقطة E . برهن أن PD+DE=2AM .



جواب:

لدينا PD+DE=PD +DE′ حيث أن النقطة E′ هي مماثلة E بالنسبة ل [BC]. إذن باعتبار A′ مماثلة النقطة A بالنسبة للنقطة [BC] نجد PD+DE=PE′=AA′=2AM (الرباعي AA′E′P متوازي أضلاع).

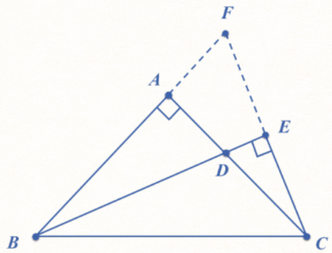
ليكن ABC مثلثاً متساوي الساقين وقائم الزاوية في A، منصف الزاوية $\hat{B}$ يقطع الضلع [AC] في النقطة D . لتكن E المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (BD). بيّن أن BD=2CE .

جواب: ننشئ النقطة F تقاطع المستقيمين (AB) و(CE)، نستنتج أن النقطة D هي مركز تعامد المثلث BCF.

نلاحظ أن المثلث BCFمتساوي الساقين رأسه B وبالتالي فإن Eمنتصف القطعة [CF] ، لأن ارتفاعه المار من B هو أيضاً منصف الزاوية $\hat{B}$.

لدينا CF=2CE لأن E منتصف القطعة [CF] ، نبين المثلثين ABD وACF متقايسين (كيف ذلك؟) ومنه CF=BD أي أن BD=2CE

أسئلة إضافية: بيِّن أن $\widehat{ADB} = \widehat{BCE}$ وأن BC=AB+AD.



نستنتج تساوي الزاويتين باستعمال الرباعي الدائري ADEF وكون المثلث BCFمتساوي الساقين.

نعلم أن BF=BA+AF ; AD=AF لأن ABD وACF متقايسين إذن BC= AB +AD.

ننشئ خارج المثلث ABC مثلثين متساويي الأضلاع ABF وACE كما يوضحه الشكل أسفله. بيّن أن BE=FC.

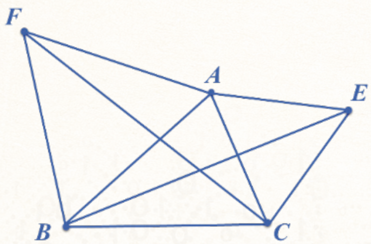
جواب:

نلاحظ أن المثلثين BAE و FAC متقايسين

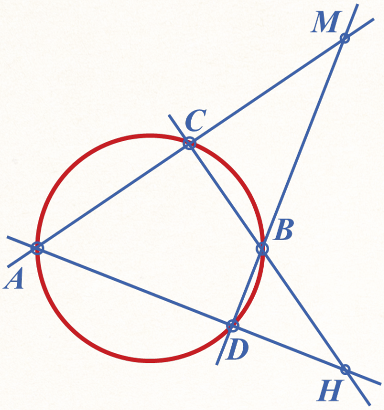
حسب خاصية تقايس ضلعين والزاوية

المحصورة بينهما (S.A.S) وبالتالي فإن

BE=FC.



لتكن الدائرة المحيطة بالرباعي ADBC والتي قطرها [AB]. M و H نقطتا تقاطع المستقيمين (AC) و (BD) على التوالي. نرمز بـ (Δ) للمستقيم المار من النقطة A والعمودي على (MH).
بيّن أن المستقيمات (Δ) و (HC) و (MD) متلاقية في نقطة.

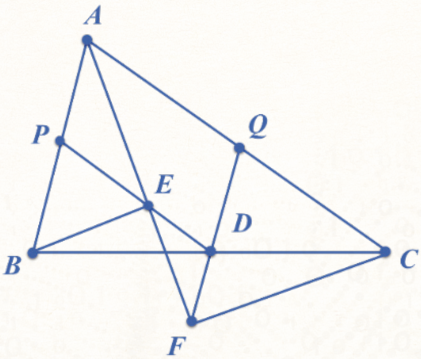


جواب: يتعرف التلاميذ مركز تعامد المثلث AMH.

في مثلث ABC النقطة D هي منتصف القطعة [BC] والنقطتان E و F هما على التولي المسقطان العموديان للنقطتين B و C على منصف الزاوية $\widehat{BAC}$. بيّن أن DE=DF .

جواب: ننشئ النقطتين P و Q منتصفي القطعتين [AB] و [AC] على التوالي. لدينا (PE) و (AC) متوازيين (مستقيم المنتصفين) و PE=PA وبالتالي $\widehat{BAE}=\widehat{BAC}$ $\widehat{BPE}=2$ إذن (PD) و (AC) متوازيان أيضاً، وبالتالي فإن النقط P و E و D مستقيمية. بطريقة مماثلة، نبين أن النقط Q و F و D مستقيمية. نستنتج باستعمال خاصية منتصف وتر مثلث قائم الزاوية أن :

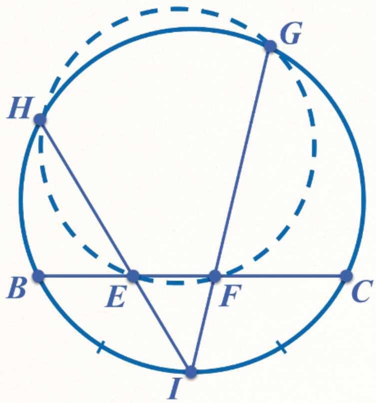
DE=PD-PE=AQ-AP=FQ-QD=DF



ليكن I منتصف القوس الصغرى $\widehat{BC}$

ننشئ نصفي مستقيمين مارين من النقطة I. سيقطعان على التوالي القطعة [BC] والدائرة في النقط E و F وG وH.

بيّن أن النقط E و F وG وH متداورة.



جواب: لدينا $\widehat{IBC} = \widehat{ICB}$ و

و $\widehat{ICB} = \widehat{BGI}$ $\widehat{HGB} = \widehat{BIH}$

باستعمال الزاوية الخارجية في المثلث IEB

باعتبارها مجموع قياسي زاويتي القاعدة

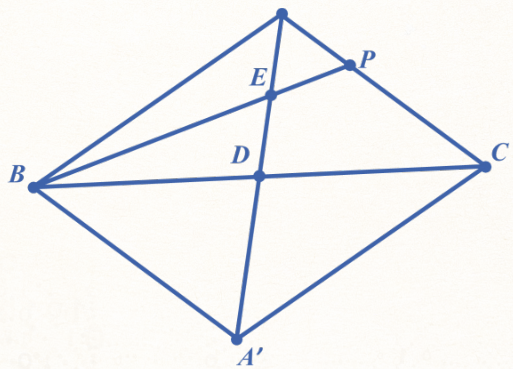
نستنتج أن $\widehat{IEF} = \widehat{FGH}$ وبالتالي فإن الرباعي

EFGH دائري.

ليكن ABC مثلثاً وD منتصف الضلع [BC] . ولتكن E نقطة من [AD] بحيث BE=AC.

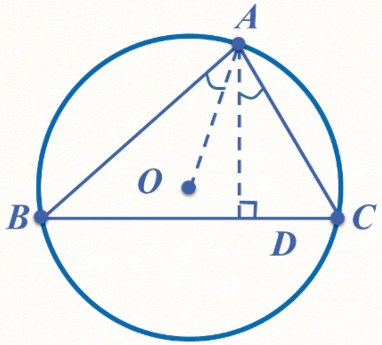
بيِّن أن AE=PE حيث إن P هي نقطة تقاطع المستقيمين (BE) و(AC)

جواب: نقوم بتحليل الوضعية ونتمم متوازي أضلاع فنجد أن المثلث BEA′ متساوي الساقين ثم نستنتج أن المثلث PAE متساوي الساقين أيضا رأسه P (متشابهان).

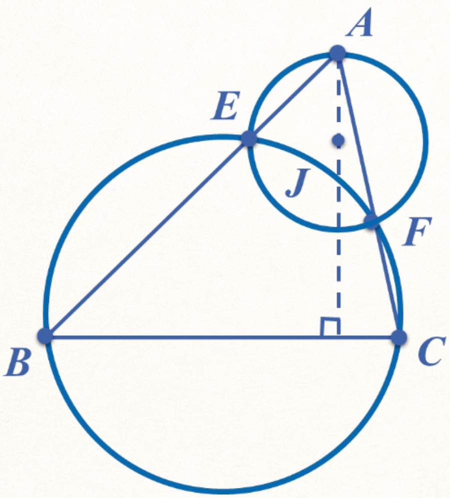


بيّن أن $\widehat{BAO} = \widehat{DAC}$ حيث O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC في وضعية الشكل التالي.

جواب: نمدد المستقيم (AO)الذي سيقطع الدائرة في نقطة A′ حيث نحصل على مثلثين متشابهين ABA′ وADC نستنتج من ذلك تساوي الزاويتين المطلوبتين لأن $\widehat{BAA'} = \widehat{BAO}$



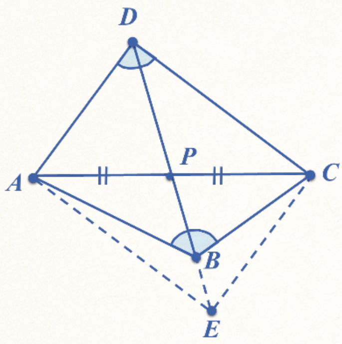
ليكن J مركز الدائرة المحيطة بالمثلث AEF. بيّن أن المستقيم (AJ) عمودي على (BC).



جواب: لتكن D نقطة تقاطع (AJ) مع الدائرة المحيطة بالمثلث بما أن AED قائم الزاوية في E فإن $\widehat{AED} = 90°$ لدينا $\widehat{EDA} = \widehat{EFA} = \widehat{EBD}$

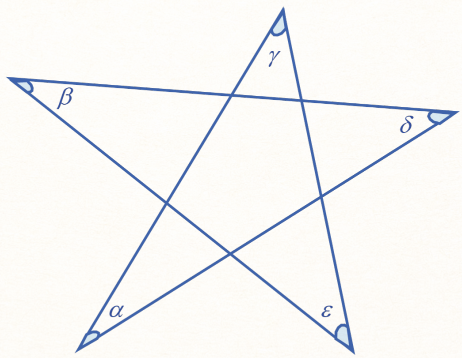
إذن نستنتج أن المثلثين AEJ و ADB متشابهين ومنه $\widehat{DGB} = 90°$

ليكن $ABCD$ رباعيا وPمنتصف القطعة $[AC]$. بيّن أنه إذا كان $\widehat{B}=\widehat{D}$ فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



جواب : سنبين أن القطرين لهما نفس المنتصف، من أجل ذلك سوف نستعمل تقنية **النقطة الشبح** (انظر الشكل جانبه). لتكن النقطة E بحيث يكون منتصف القطعة $[DB]$; إذن يصبح الرباعي AEDB متوازي أضلاع وبالتالي فإن$\widehat{E}=\widehat{D}$ ومنه $\widehat{E}=\widehat{B}$ إذن النقطتان E وB منطبقتان أي أنE=B. ومنه فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.

بيّن أن مجموع الزوايا الداخلية للنجمة الخماسية يساوي 180°.



$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=180^{\circ}$$

المثلثان RST وTUV متساويا الأضلاع.

a) حدِّد قياس الزاوية $\widehat{RSU}$.

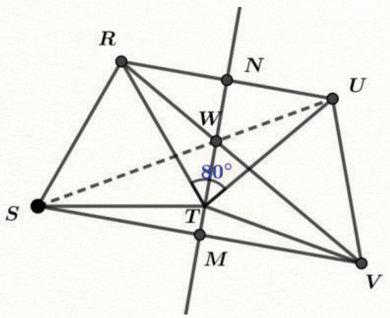
b) لتكن W نقطة تقاطع المستقيمين (VR) و (SU). بين أن المستقيم (WT) عمودي على (SV).

جواب:

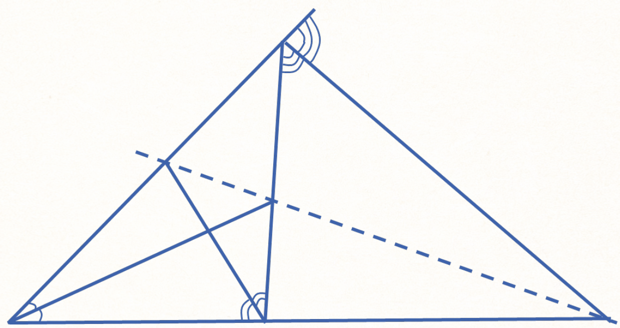
a) باستعمال خاصية مثلث متساوي الساقين نجد $\widehat{RSU} = 40°$

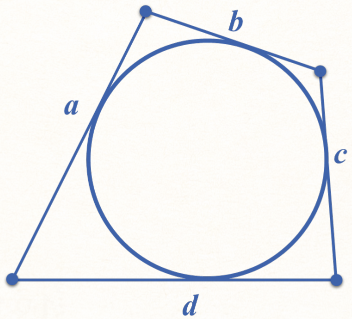
b) بما أن $\widehat{RUS} = \widehat{VSU} = 30°$ (زاويتان متبادلتان داخليا متقايستان) فإن المستقيمين (RU) و (SV) متوازيان ومنه فإن الرباعي $URSV$ شبه منحرف ولدينا كذلك $RS = UV$ إذن $URSV$ شبه منحرف متساوي الساقين وبالتالي فإن المستقيم المار من W نقطة تقاطع القطرين و من منتصفي القاعدتين هو محور تماثل للرباعي $URSV$ أي أنه واسط القطعة لكل من القاعدتين ؛وبما أن

$TS = TV$ فإن النقطة T تنتمي إلى واسط القطعة لكل من القاعدتين وبالتالي فإن المستقيم (WT) هو واسط القطعة $[SV]$ ومنه نستنتج أن (WT) و (SV) متعامدان.



من المهم، أثناء التداريب، اقتراح وضعية هندسية بدون كتابة التعليمة، لرفع التحدي وترك مجال للتلاميذ لمناقشة المسألة في مجموعات صغرى ثم صياغة الأسئلة المناسبة وتقديم براهين حلولها. وبالتالي ندفع التلاميذ أيضا لاستكشاف مسائل تكون نتيجة لتحليلهم لوضعية الانطلاق، وربما بإجراء بعض التعديلات الطفيفة، قد يحصلون على مسائل هامة. ستوسع بدون شك آفاقهم المعرفية في مجال الهندسة المستوية. مع الحرص قدر الإمكان على استعمال برانم الهندسة المتحركة.



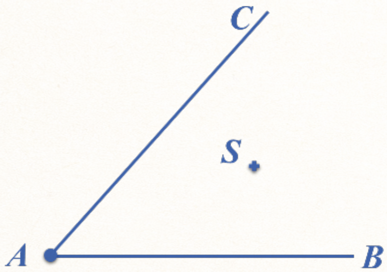


$$a+c=b+d$$

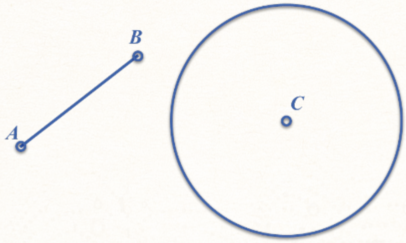
إنشاءات هندسية باستعمال مسطرة غير مدرجة وبركار

لقد سبق للتلاميذ أن تعرفوا موضوع الإنشاءات الهندسية، حيث أنجزوا تمارين، مثل إنشاء زاوية قياسها 105° باستعمال المسطرة والبركار (القسم السادس). وبالنظر لأهمية هذا الموضوع، يمكن استثمار تلك الخبرات السابقة والعمل على تطويرها، بتناول وضعيات متنوعة ومتدرجة الصعوبة، وذلك باستعمال استدلال بواسطة التحليل والتركيب، كما تمت الإشارة إلى ذلك سابقا.

- أنشئ مربعاً إذا علمت مجموع طولي قطره وأحد أضلاعه.
- أنشئ متوازي أضلاع إذا علمت طول أحد قطريه وطول أحد ارتفاعاته.
- أنشئ مثلثا قائم الزاوية إذا علمت طول وتره ومجموع طولي الضلعين الآخرين.
- أنشئ قطعة طرفاها ينتميان إلى نصفي المستقيمين(AB] و[AC) بحيث تكون النقطة S منتصفها،(يمكن استعمال التماثل)



- أنشئ وتراً من الدائرة له نفس طول القطعة [AB] ويكون حامله موازياً للمستقيم (AB)



(يمكن استعمال صورة الدائرة بالإزاحة التي تحول النقطة A إلى النقطة B.)

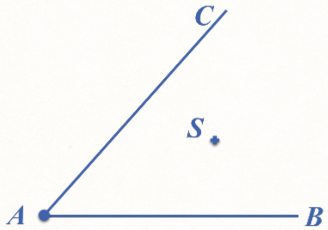
4- أمثلة إضافية في الهندسة من أجل الاستئناس بمضامين المقرر الأولمبي

1.4- أنشئ دائرة تكون مماسة لمستقيمين متوازيين وتمر من نقطة توجد داخل الشريط المحدد بالمستقيمين.

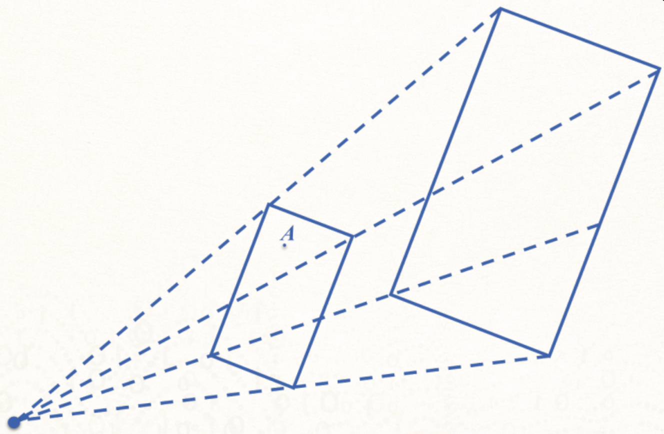
2.4- أنشئ شبه منحرف إذا علمت أن أطوال أضلاعه الأربعة 2cm, 3cm ; 4cm, 5cm

(يمكن استعمال طريقة الإزاحة)

3.4- أنشئ نقطتين X وY على التوالي من نصفي المستقيمين[AB) و[AC) بحيث يكون محيط المثلث SXY دنوياً (minimal) أي أصغر ما يمكن. (يمكن استعمال التماثل لإيجاد الحل المناسب)



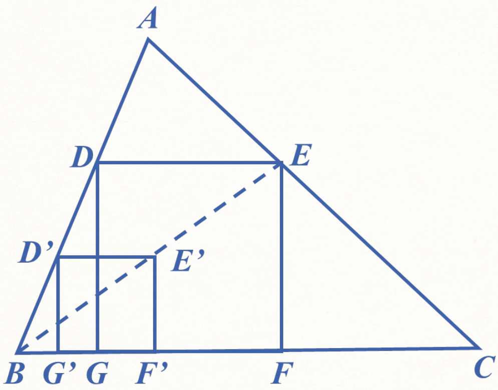
4.4- أنشئ النقطة A′ نظيرة النقطة A في الشكل التالي، علما أن أضلاع المستطيلين متوازيان مثنى مثنى:



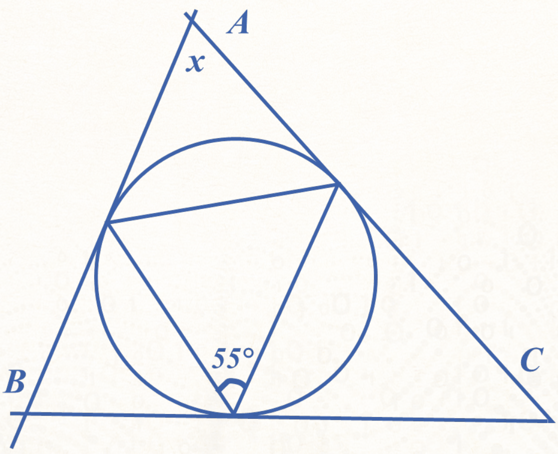
ملاحظة: لقد تم تقديم مفهوم التحاكي بشكل ضمني من خلال إدراج التكبير والتصغير.

5.4- أنشئ داخل مثلث ABC مربعاً حيث يكون رأسان من رؤوسه نقطاً من الضلع [BC] ورأساه الآخران نقطتين على التوالي من الضلعين [AB] و[AC].

حيث يمكن إنجاز هذا الإنشاء في مرحلتين، ينشئ التلميذ أولاً مربعاً يكون أحد أضلاعه ضمن [BC] وأحد رؤوسه ′D على الضلع [AB]، ثم يقوم بتكبير المربع ′G′D′E′F في مرحلة ثانية بتمديد المستقيم (′BE) ليقطع [AC] في النقطة E ويكتمل بذلك إنشاء المربع الذي يحقق شروط المسألة. (يمكن حل المشكلة بالنسبة لمعين)

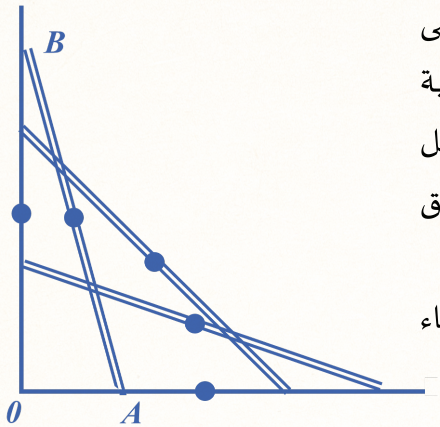


6.4- احسب x قياس الزاوية التي رأسها A حيث يبين الشكل رفقته الدائرة المحاطة بالمثلث ABC .

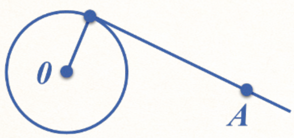


7.4- يستند عمود خشبي طوله d على حائط، بحيث طرفه A على أرضية أفقية ملساء وطرفه B يمس الحائط. ما المحل الهندسي لمنتصف [AB] عندما ينزلق العمود؟

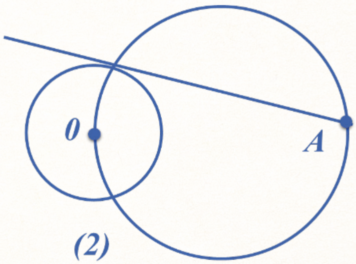
يبين الشكل التالي بعض الوضعيات أثناء انزلاق العمود.



8.4- لإنشاء المستقيم المماس لدائرة والمار من نقطة خارج الدائرة الشكل (1) نستنتج أن نقطة التماس تحدد زاوية قائمة، هذه النقطة تنتمي إذن لتقاطع الدائرة التي أحد أقطارها [OA]; والدائرة التي مركزها O انظر الشكل (2)، يوجد مماسان.



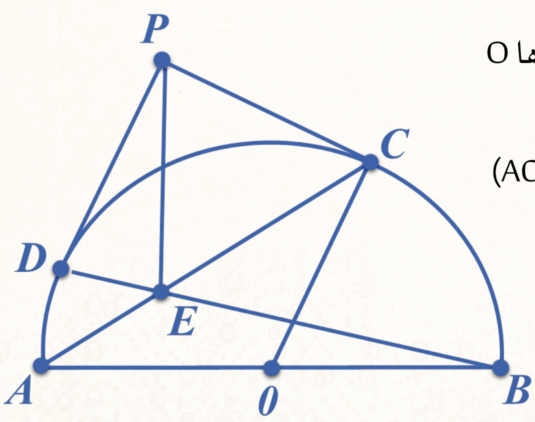
(1)



(2)

- لتكن P نقطة خارج نصف دائرة مركزها O النقطتان C وD نقطتا تقاطع المماسين المارين من P مع الدائرة، ونقطة تقاطع (AC) و(BD).

بيّن أن (PE) عمودي على (AB).

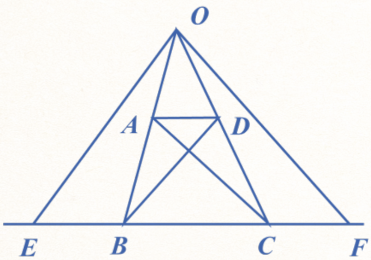


9.4- ليكن ABC مثلثاً قائم الزاوية في B بحيث $\widehat{BAC}=60°$. المنصف الداخلي للزاوية التي رأسها A، يقطع [BC] في النقطة D. احسب قيمة النسبة $\frac{BC}{CD}$.

10.4- ليكن (EA) مماسا لدائرة (C) أحد أقطارها [AB]، في النقطة A. نعتبر مستقيماً يمر من E ويقطع الدائرة (C) في النقطتين C وD. المستقيم (OE)، حيث O مركز(C)، يقطع [BC] و[BD] في النقطتين F وG. بيّن أن النقطة O منتصف [FG].

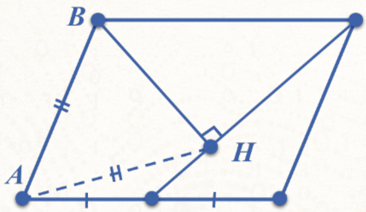
11.4- ABC مثلث قائم الزاوية، K نقطة من الوتر [AB] وL نقطة من الضلع [AC] بحيث AC=AK وKB=LC . لتكن M نقطة تقاطع المستقيمين (BL) و(CK). بين أن المثلث CLMمتساوي الساقين.

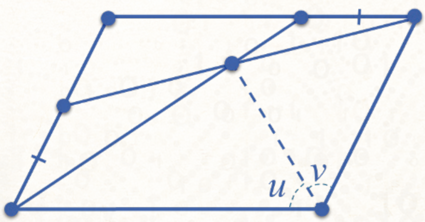
12.4- ليكن ABCD متوازي أضلاع وK نقطة من المستوى بحيث AK=BD . لتكن النقطة M منتصف القطعة [CK] . بين أن الزاوية $\widehat{BMD}$ قائمة.



13.4- ABCD شبه منحرف، O نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و(CD). المستقيمان (OE) و(BD) متوازيان و(AC) و(OF) هما كذلك متوازيان، بحيث ,E B, C وF نقط مستقيمية. برهن أن EB=CF. (انظر الشكل).

14.4- الشكلان أسفله يمثلان متوازيي أضلاع. لاحظ ترميز تقايس المسافة والزاوية القائمة ثم بيّن أن AB=AH في الشكل الأيسر ثم بيّن تقايس الزاويتين uوv في الشكل على اليمين.





15.4- نعتبر دائرة معلومة ونقطة A من المستوى.

- ما المجموعة التي تنتمي إليها منتصفات الأوتار التي تمر حواملها من النقطة A ؟

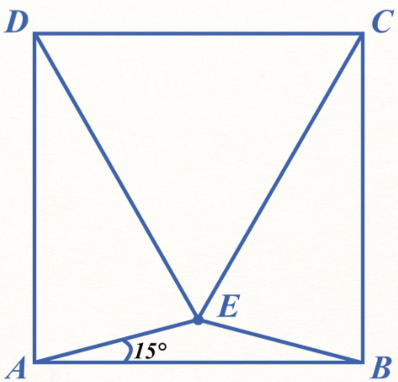
(وتر دائرة هو كل قطعة ينتمي طرفاها إلى هذه الدائرة)

-أنشئ النقطة من هذه الدائرة، التي لها أقرب مسافة عن النقطة A . (أنشئ النقطة من هذه الدائرة التي تكون لها أبعد مسافة عن النقطة A)

16.4- ليكن ABCD رباعيا محدبا بحيث AD=AB+CD. منصفا الزاويتين $\widehat{BAD}$ و$\widehat{CDA}$ يتقاطعان في النقطة E بين أن EB=EC.

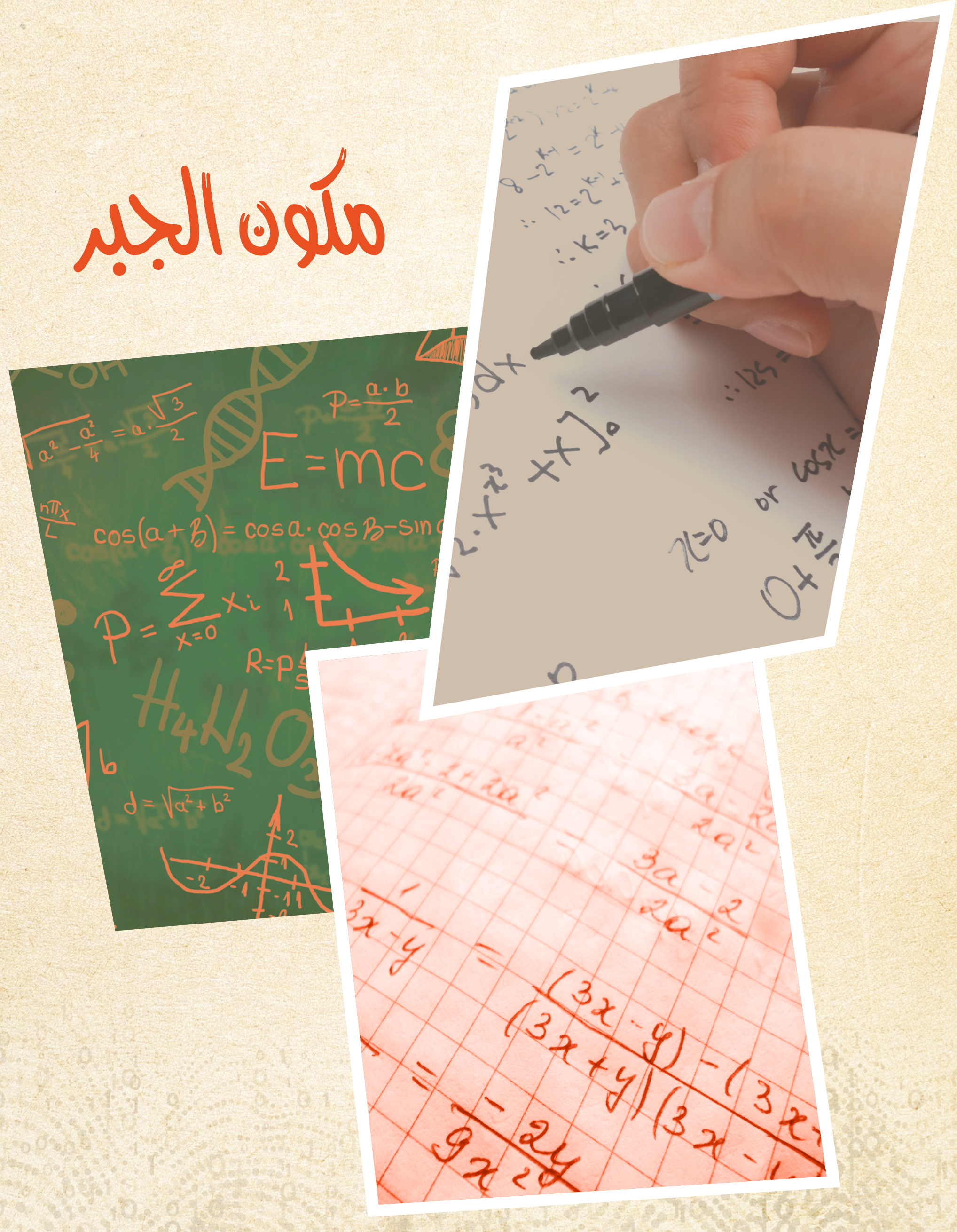
17.4- ليكن ABC مثلثاً و(C) دائرة مماسة داخلياً للدائرة المحيطة بالمثلث ABC وتمس الضلع [BC] في النقطة T. المستقيم (AT) يقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC في نقطة D. بيّن أن المستقيم المار من T و الموازي للمستقيم (CD) مماس للدائرة المحيطة بالمثلث (ATB).

18.4- نعتبر مربعاً ABCD وننشئ داخله مثلثاً متساوي الساقينABE رأسه E بحيث يكون $\widehat{EAB} = 15^\circ$ بيّن ان المثلث DEC متساوي الأضلاع.



19.4- نعتبر ABC مثلثاً و$[D]$ المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{BAC}$ وD نقطة تقاطعه مع$[BC]$. بيّن أن : $AB \times AC = DB \times DC + AD^2$

مكون الجبر



مكون الجبر

مكون الجبر

يعد مجال الجبر، المكون الثاني من مقرر الرياضيات الأولمبية، من بين المجالات التي ترتبط بعدد مهم من التعلمات المدرسية، إذ نجد أن مكوناتها تهم على سبيل المثال لا الحصر، الدوال العددية والمتتاليات والمتفاوتات (AM- GM...) والحدوديات (تحديد جذور الحدوديات وعلاقتها بالمعاملات - les relations de Viète- والتعميل...) وحل نظمات، ومعادلات دوالية (Équations fonctionnelles) .... وتجدر الإشارة إلى أن هذه المعارف بمفردها لا تكفي لحل المسائل المقترحة بدون اكتساب جملة من المهارات والتقنيات التي يتم صقلها بالتدرُّب المتواصل والتدريجي، وتوظيفها في حل وضعيات غير اعتيادية ذات الصلة بها.

وفي هذا الصدد، يُقترح أن يتم استثمار مكتسبات تلاميذ السلك الثانوي الإعدادي في الجبر بمراعاة دعامتين أساسيتين. تهدف أولاهما الاهتمام بمقاربة التفكير الجبري والتي سنقدم، فيما يلي ملخصاً لها. فيما تشكل ثانيهما عناصر المقرر الأولمبي في مكون الجبر الذي يهدف إلى تثبيت المكتسبات وإغنائها ببعض الإضافات.

1- توجيهات منهجية

يحتل الجبر مكانة هامة في الرياضيات، ويستدل على ذلك بمدى اهتمام الباحثين في الرياضيات وديداكتيك الرياضيات إلى إيلائه عناية خاصة بمختلف أسلاك التعليم وفق اتجاه يعرف بـ (early algebra)، حيث تبيّن بعض الدراسات أن المتعلمين قادرون على إبداع أنماط متقدمة من التفكير، عندما تتاح لهم الفرصة لتطويع قدراتهم بشكل أمثل.

وفي السياق ذاته يلاحظ أن عدداً كبيراً من تلاميذ الثانوي الإعدادي يتعثرون في حل وضعيات غير مترابطة (انظر الأمثلة)، مقارنة مع تلاميذ السادس ابتدائي الذين لم

يدرسوا في هذا المستوى درس المعادلات وطريقة ترييض وضعية. ومن أجل الرفع من مستوى التفكير الجبري عند تلاميذ الإعدادي الثانوي، ينبغي العمل على تجاوز كل مقاربة منهاجية تعتبر الجبر، كما تعكسه محتويات البرامج ومضامين الكتب المدرسية، مرتبطاً بشكل أساسي بتطبيق خوارزميات لحل المعادلات، من هنا، ينبغي التذكير أن التفكير الجبري يهدف إلى تنمية قدرات الاستدلال التحليلي بشكل خاص، والقدرات العليا للتفكير بشكل عام. وعملا على تقوية تعلمات التلاميذ، في هذا المجال، يمكن منذ مراحل التعليم المبكرة اعتماد المنهجية الآتية:

*يتم في بداية السنة الأولى مقاربة حل مسائل جبرية متنوعة باستعمال النمذجة بواسطة أشرطة أو قطع عبارة عن ترسيمة يوضح فيها المتعلم معطيات المسألة والمجهول، وذلك بدون استعمال الحروف ($x, y, \dots$)، تبعا لما أسلفنا عن الاستعمال المبكر للحرف، كما يوضح المثال التالي:

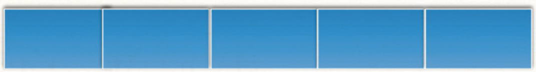
باع فلاح عدداً من البيض لثلاثة زبائن:

- الزبون الأول اشترى خُمسَي($\frac{2}{5}$) العدد الإجمالي من البيض؛
- الزبون الثاني اشترى الثلثين ($\frac{2}{3}$) مما تبقى من البيض؛
- الزبون الثالث اشترى نصف ما تبقى من البيض.

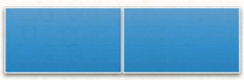
علماً أن العدد المتبقي في النهاية هو 13 بيضة، فكم عدد البيض الذي كان لدى الفلاح؟

تعليق: ضمت عينة من أجوبة 70 تلميذ(ة) جوابين صحيحين فقط.

قد يكون مرد هذا لصعوبة الترييض الاعتيادي، في حين أن استعمال الخطاطة التالية للتعبير عن عدد البيض سيؤدي إلى إجراء واضح وسريع.



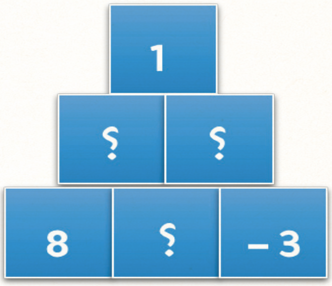
يمثل خمسي ما باع للزبون الأول:



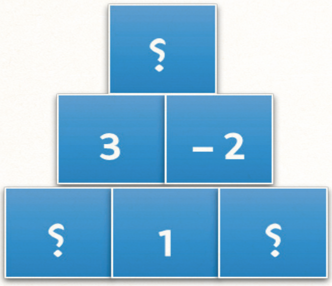
يستنتج بعد مواصلة الاستدلال على هذا النحو أن الجزء :

سيمثل 26 بيضة وبالتالي فإن عدد البيض يساوي 130.

* يتم بناء مفهوم الحساب الحرفي انطلاقاً من وضعيات مشكلة، مثلاً، باعتبار أن مجموع كل خانتين متحاذيتين يساوي عدد الخانة فوقهما، يملئ تلاميذ السنة الأولى إعدادي الشبكات الآتية:



شكل 1



شكل 2

التركيز على مقاربة الاستدلال التحليلي وأنشطة البرهنة، حيث يتم مثلاً تحديد زوجية مجموع 5 أعداد فردية بواسطة برهان وليس فقط بملاحظة حالات خاصة.

من المهم أن يتم الاستئناس مبكراً بوضعيات التعميم (الانتقال من الخاص إلى العام)، انطلاقاً من تعرف القواعد الضابطة للأنماط patterns، وتعزيز تلك القدرة، بعد تقديم الحساب الحرفي، وإتاحة فرص متعددة للتلاميذ لممارسة الاستدلال بالاستقراء بشكل تلقائي من خلال التجريب بالمحاولة والخطأ. فمثلاً في وضعية Radford التالية، يطلب من تلاميذ المستوى الأولى والثانية إعدادي تحديد مجموع عدد الأقراص في المرحلة 100 والتعميم بالنسبة ل n حيث سيتوصلون إلى الصيغة $(n + 2) + (n + 1)$.

-إنجاز أنشطة الترييض أو النمذجة الجبرية كما في المثال التالي:

يقترح أحد النوادي الثقافية مقابلاً مالياً للاستفادة من خدماته بإحدى الصيغتين التاليتين:

- الصيغة الأولى: تسديد مبلغ 80 درهم عند كل حصة.

- الصيغة الثانية: تسديد مبلغ 500 درهم بالنسب للحصص الخمسة الأولى في الشهر، وتأدية مبلغ 40 درهم عن كل حصة إضافية.

يود أحمد الاشتراك في هذا النادي بحصتين في كل أسبوع. فما الصيغة التفضيلية التي سوف يتبعها؟

- إدراج صنف الوضعيات غير المترابطة (situations déconnectées) إلى جانب الوضعيات الاعتيادية، المثالان التاليان لوضعيتين تم اقتراحهما ضمن رائز، بيّنت نتائجه صعوبات لدى عينة من التلاميذ المغاربة من مستوى الإعدادي في التعامل مع وضعيات غير مترابطة. ويتبين من خلال تحليل مضمون بعض الكتب المدرسية للرياضيات، لسلكي التعليم الابتدائي والثانوي الإعدادي، غياب تام لتناول هذا الصنف من الوضعيات غير المترابطة.

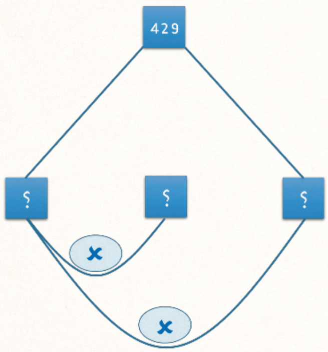
ومن أجل التحليل والمقارنة، نقدم فيما يلي مثالين لوضعية غير مترابطة وأخرى مترابطة.

في وضعية غير مترابطة لا يمكن إيجاد علاقة مباشرة تربط بين اثنتين من معطيات المسألة، مما يجعل حل المسألة مستعصياً بواسطة استدلال حسابياتي مما يدفع بالمتعلمين لاعتماد الاستدلال التحليلي.

المثال 1:

ينتج معمل ثلاثة أنواع من الأحذية. يبلغ عدد أحذية الأطفال المنتجة 7 مرات عدد أحذية الرجال و4 مرات عدد أحذية النساء. إذا كان هذا المعمل ينتج ما مجموعه 429 حذاءً في اليوم فما هو عدد الأحذية التي ينتجها من كل نوع في اليوم؟

يمكن توضيح كل مسألة من هذا الصنف باستعمال خطاطة تمثل فيها الخانات المظللة معطيات المسألة.



في الخانة نكتب العدد الإجمالي للأحذية، ونكتب في الخانتين أسفل الشكل (علاقتين ضربيتين، يمكن في وضعيات أخرى أن نجد علاقات جمعية أو المزج بين الضرب والجمع...) بخلاف صنف الوضعيات غير المترابطة، توجد وضعيات مترابطة يكون من السهل فيها التعرف على علاقة مباشرة بين مجهولين ويتم استنتاج الحل بإجراء استدلال حسابياتي كما يوضح المثال التالي، وكما أسلفنا جل وضعيات التقسيم التي يتم التركيز عليها هي وضعيات مترابطة.

المثال 2:

يقدم نادي رياضي ثلاثة أنواع من الأنشطة الرياضية خلال اليوم بحيث لكل مشارك الحق في اختيار نوع واحد فقط. يقدّر عدد المشاركين في كرة القدم بأربع مرات عدد المشاركين في كرة السلة وبسبع مرات عدد المشاركين في كرة اليد. إذا علمت أن 252 فرداً قد شاركوا في كرة القدم فما عدد المشاركين في كل من كرة السلة وكرة اليد؟

2- القدرات المنتظرة من المقرر الأولمبي لمكون الجبر

يتم تدريب المتعلمين من خلال محتويات هذا الفصل لجعلهم، على سبيل المثال لا الحصر، قادرين على:

A1	نمذجة وترييض وضعيات من مجالات مختلفة (مسائل في التناسبية...)
A2	إجراء تحويلات جبرية بسلاسة (التعميل، الجذور المربعة، الشكل القانوني لثلاثية حدود...)
A3	حل معادلات ونظمات جبرية (خطية أو غير خطية)
A4	حل متفاوتات جبرية أو هندسية باستعمال المعارف المرجعية في جدول المحتويات.
A5	حل معادلات دوالية.

محتويات المقرر الأولمبي لمكون الجبر

المستوى	المحتوى	توجيهات
سنة أولى إعدادي	- النشر والتعميل - المعادلات إغناء التعلمات المرتبطة بحل مسائل نابعة من الواقع المعيش و ترييضها بتحديد و تحليل المعطيات و اختيار المجهول الملائم و اختيار الأدوات الرياضية الضرورية في الحل. - الترتيب - المتفاوتة المثلثية	- تشير التوجيهات التربوية إلى توسيع مجال الحساب الجبري، ويمكن أن ندرج في هذا المقرر الأولمبي كإضافة غير ملزمة في مقرر السنة الأولى المتطابقات الهامة. - تنمية قدرات التلاميذ على تحديد العامل المشترك لحدود مجموع جبري لإدراك أهمية التعميل في الحساب الذهني. - السمو بالتعامل مع التقنيات والقواعد المرتبطة بالترتيب والعمليات على الأعداد العشرية والكسرية من خلال تناول وضعيات لمقارنات بسيطة مثل 3^{200} و 2^{300} أو 17^{14} و 31^{11} .... - يكتشف التلاميذ نجاعة المتفاوتة المثلثية في حل فئة من الوضعيات ويتعرفون حالة التساوي.

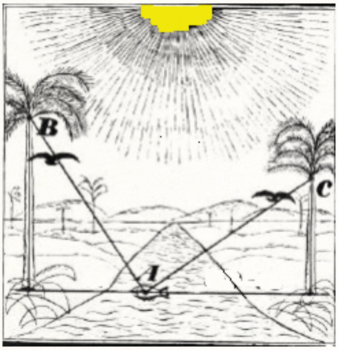
توجيهات	المحتوى	المستوى
السمو بالتعامل مع مختلف القواعد والتقنيات المتعلقة بالحساب الجبري. التطرق إلى توظيف المتطابقات الهامة في حساب أو تعميل تعابير جبرية. - الارتقاء بالتعلمات المتعلقة بحل معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد أو حل معادلات تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد. - الارتقاء بترييض وحل وضعيات باستعمال معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد وتأويل النتائج المحصل عليها. - يتم تناول وضعيات في التناسبية البسيطة والمركبة.	- الحساب الحرفي - المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد - الترتيب السمو بالتعامل مع التقنيات والقواعد المرتبطة بالترتيب والعمليات على الأعداد الجذرية. - التناسبية - الدوال الخطية	سنة ثانية إعدادي

توجيهات	المحتوى	المستوى
- يتم استعمال الطريقة الاعتيادية $x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ - تعرف المجالات من خلال حلول المتراجحات وتمثيلها على المستقيم المدرج. - الارتقاء بمهارات الحساب والتحويلات الجبرية من خلال تناول وضعيات غير اعتيادية، بحيث -ننمي لدى التلاميذ القدرة على تعرف واستبصار تعابير جبرية تكون مربعات لتعابير بسيطة. - يتم السمو بالمكتسبات فيما يخص المعادلات من الدرجة الأولى أو تلك التي تؤول إلى معادلات من الدرجة الأولى. - استثمار المهارات السابقة للتعامل مع معادلات من الدرجة الثانية/تربيعانية/ معادلات لا جذرية بسيطة. ينبغي تنويع طرائق الحل بدون الاستعمال الصريح لصيغة المميز.	- عموميات حول تحويل تعابير جبرية - تقنية التعميل والنشر وتقنية إكمال مربع في التعبير: x^2+ax - الحساب على الأعداد الجذرية واللا جذرية وتقنية الضرب في المرافق والترتيب. - متطابقات هامة لأكثر من متغيرين مثل $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ - نظمات خطية بمجهولين وأمثلة لنظمات غير خطية ولأكثر من مجهولين. - تعرف وحل معادلات دوالية بسيطة	السنة ثالثة إعدادي

		- استعمال الطرق الاعتيادية كالتعويض وطريقة التأليفة الخطية كما يتم استئناس التلاميذ بتقنية تغيير المتغير. - يتم تعرف معادلة كوشي التالية $f(x+y)=f(x)+f(y)$ وقبول حلولها، كدوال خطية، واستعمالها في تناول وضعيات بسيطة بهذا المستوى.

المستوى	المحتوى	توجيهات
السنة ثالثة إعدادي - تتمة-	- المتفاوتة المثلثية، المتفاوتات بين المعدلات الاعتيادية (حسابي، هندسي، توافقي وتربيعي) عددين موجبين a, b قطعاً. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ - تعرف واستعمال المتفاوتة الهامة $a, b, \alpha, \beta > 0; \frac{a^2}{\alpha}+\frac{b^2}{\beta} \geq \frac{(a+b)^2}{\alpha+\beta}$ يتحقق التساوي في حالة $\frac{b}{\beta} = \frac{a}{\alpha}$ - نماذج متفاوتات هندسية ومتفاوتات فيها تعابير مثلثية.	- يكون من الممتع بالنسبة للتلاميذ أن يقوموا بحل طيف شاسع من المتفاوتات بطرق بسيطة (باستعمال توليفة من المتفاوتات المرجعية الستة) أو بواسطة تقنيات اعتيادية مثل حساب الفرق وتحديد إشارته، الانتقال لمقارنة المربعين، توظيف قواعد التأطير الاعتيادية... - تعد هذه المتفاوتات الست مرجعية، ويمكن حسب مستوى التلاميذ إعطاء تعميمات لها بالنسبة لأكثر من متغيرين مع العناية بدراسة حالة التساوي واعتباره جزءاً من الحل الكلي. فمثلاً يمكن استعمال المتفاوتة 8 بالنسبة لثلاثة متغيرات لنبيّن أن $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ متفاوتة Nesbitt. حيث a و b و c أعداد موجبة قطعاً. - يتم توظيف الإطار الهندسي لصياغة حلول مميزة تتماهى مع التعلمات الأساسية المكتسبة في هذا المجال مع الحرص على ربط مقادير جبرية بأطوال هندسية وإبرازها في **أشكال هندسية**. - تناول مسائل حول القيم القصوية/ الدنوية لمقادير هندسية.

3- أمثلة لوضعيات تستهدف تنمية القدرات المنتظرة



تبين الصورة[1] نخلتين على جانبي نهر. ارتفاع النخلة الكبيرة 30 متراً وارتفاع الثانية 20 متراً، فيما تبلغ المسافة بين جذعيْ النخلتيْن 50 متراً. يوجد طائر أعلى كل نخلة من النخلتين (انظر الصورة). اندفع الطائران في نفس الوقت وبنفس السرعة، فلمسا السمكة في الآن نفسه. ما مسافة السمكة عن النخلة الكبيرة، عند اصطدامها بالطائرين؟

جواب: لتكن x مسافة السمكة عن النخلة الكبرى لدينا باستعمال مبرهنة فيتاغورس

$30^2 + x^2 = 20^2 + (x-50)^2$ وبالتالي فإن x=20 نأول الحل بواسطة جملة.

تبعد السمكة عن النخلة الكبرى بمسافة 20 متراً.

حل المعادلة $x^5 + x = 2x^6$

جواب: الحلين الوحيدين لهذه المعادلة هما 0 و 1.

لحل هذه المعادلة، ينبغي استحضار المقاربة التحليلية نظراً لعدم وجود خوارزمية للحل المباشر، نلاحظ أن 0 و 1 حلين لهذه المعادلة، نقوم بعد ذلك بمناقشة حلول المعادلة $x^4 + 1 = 2x^5$ تبعاً لقيم x.

إذا كان $x < 0$ فإنه لا يوجد حل لأن $2x^5$ عدد سالب بينما $x^4 + 1$ عدد موجب.

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $x^5 < x^4$ وبالتالي $2x^5 < 2x^4$ ومنه

$x^4 + 1 < 2x^4$ أي أن $1 < x^4$ وهذا غير ممكن لأن $x < 1$.

إذا كان $x > 1$ نستعمل الطريقة نفسها في حالة $0 < x < 1$.

---

[1] عن كتاب للرياضيات من القرن 11 بتصرف

عمل التعابير الجبرية التالية: x^4+x^2+1 و x^5+x+1

جواب: نلاحظ أن $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$ ثم نكمل التعميل

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$$

لدينا $x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1$ نكمل التعميل باستعمال ما يلي:

$$x^5+x+1=x^2+x+1+x^2(x^3-1)$$

و

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

حدّد جميع الدوال P بحيث $P(x-2)=3x^2+11x-1$

جواب: $P(x)=P\big((x+2)-2\big)=3(x+2)^2+11(x+2)-1$

$=3x^2+23x+33$

قياسا ضلعي مثلث هما على التوالي 3,8 و 0,6. احسب قياس الضلع الثالث c علماً أن هذا القياس عدد صحيح طبيعي.

جواب: لدينا حسب المتفاوتة المثلثية $3{,}8-0{,}6<c<3{,}8+0{,}6=4{,}4$ أي أن $3{,}2<c<4{,}4$ إذن c=4

لتكن M نقطة بداخل مثلث ABC بحيث AB هو أطول أضلاعه.

بيّن أن: $MA+MB>MC$.

جواب: نمدد المستقيم(MC) ليقطع [AB] في النقطةD. تبعاً للحالة التي تكون فيها إحدى الزاويتين $\widehat{ADC}$ أو $\widehat{BDC}$ منفرجة نفترض الحالة الأولى مثلاً ، نكمل الجواب باستعمال خاصية مقارنة الزوايا والأضلاع المقابلة لها أن $AC>CD>MC$ وبما أن $AB\geq AC$ و $MA+MB>AB$. تدرس الحالة الثانية بطريقة مماثلة.

برهن أن مجموع طولَيْ ضلعيْ رباعي محدب ABCD أكبر من نصف محيطه وأصغر من هذا المحيط.

جواب: نستعمل المتفاوتات المثلثية بالنسبة للمثلثات ABC وADC و ABD وBCD بالجمع طرفاً بطرف نجد $2AC < AB + BC + AD + CD$

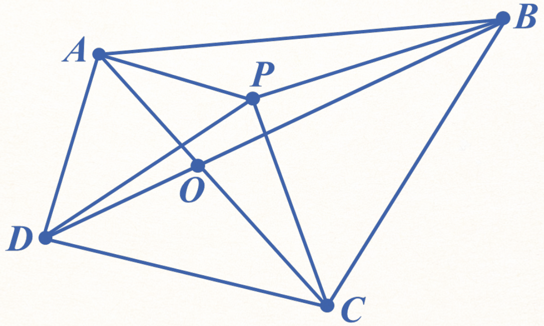
و $2BD < AB + AD + BC + CD$ ومنه

$$AC + BD < AB + BC + AD + CD$$

نجيب بطريقة مماثلة على المتفاوتة الثانية.

حدّد بداخل رباعي محدب ABCD نقطة بحيث يكون مجموع مسافاتها عن الرؤوس دنوية (minimale).

جواب: حسب المتفاوتة المثلثية يكون المجموع MB+MD دنويا ويساوي BD إذا وفقط إذا كان $M \in [BD]$ وبالتالي فإن النقطة المناسبة هي O تقاطع قطري الرباعي. لدينا لكل نقطة P مختلفة عن O المتفاوتات $PB + PD > BD$ و $PA + PC > AC$



بيّن أن $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}}$ لكل عددين موجبين a و b .

جواب: يمكن استعمال المتفاوتة المرجعية $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \geq \frac{u^2+v^2}{2}$

بوضع $u = \sqrt{a}; v = \sqrt{b}$ أو باستعمال طريقة مباشرة.

1- بيّن أن $\frac{x}{a}+\frac{b}{x}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}$ لكل عدد x موجب قطعاً، علماً أن a وb عددان موجبين قطعاً.

متى تتحقق المتساوية؟

2- بيِّن أنه لكل عدد x بحيث $x\geq 1$ لدينا $ux+\ \frac{v}{x}\geq u+v$ ، حيث $u>v>0$.

جواب: 1- نحسب الفرق ونستعمل متطابقة هامة تعطي مربعاً موجباً ينعدم إذا وفقط إذا كان $X=\sqrt{a\,b}$.

2- لدينا $ux+\ \frac{v}{x}=ux-vx+v\left(x+\frac{1}{x}\right)=(u-v)x+v\left(x+\frac{1}{x}\right)$

وحيث أن $(u-v)x\geq(u-v)$ و $x+\frac{1}{x}\geq 2$

ومنه $ux+\ \frac{v}{x}\geq(u-v)+2v\geq u+v$

بيِّن أن $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$ لكل أعداد موجبة قطعاً a و b و c .

جواب: لدينا $a^4+b^4+c^4\geq a^2\quad{}^2+\quad{}^2c^2+c^2\quad{}^2$ وكذلك

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq(ab)(bc)+(bc)(ca)+(ab)(ca)$$
$$=abc(a+b+c)$$

بيّن أنه لكل عدد حقيقي x لدينا: $\mathrm{x}^4\ -\ \mathrm{x}+\frac{1}{2}>0$

جواب: يتم استعمال التحويل الجبري

$$\mathrm{x}^4-\mathrm{x}+\frac{1}{2}=\mathrm{x}^4-\mathrm{x}^2+\frac{1}{4}+\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+\frac{1}{4}$$

الذي هو مجموع مربعين.

بيّن أن لكل أعداد x, y, z موجبة قطعاً يكون لدينا

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{x}}$$

تعتبر هذه الوضعية مناسبة لاستئناس التلاميذ بطريقة تغيير المتغير من أجل تبسيط

التعبير الجبري ثم تطبيق متفاوتة الوسطيْن الهندسي والحسابي AMG، بعد ذلك.

جواب: نضع $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ تصبح المتفاوتة

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

مع استحضار المعلومة الإضافية الهامة $abc=1$ لدينا

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

من جهة ثانية $ab+bc=b(a+c) \geq 2b\sqrt{ac}$ وحيث أن $2b\sqrt{ac}=2\sqrt{b}$ يتم الحصول

عليها بعد إجراء عمليات مماثلة بالنسبة لـ $bc+ca, ab+ac$ ثم نجمع طرفاً بطرف.

- ملاحظة هامة:

إذا كان التعبير الجبري متجانساً أي $f(ta, tb, tc)=f(a,b,c)$ فإنه يمكن، بدون التخلي

عن الحالة العامة، افتراض مجموع الأعداد يساوي 1 أي

$$a+b+c=1$$

مثلاً لتكن a, b, c أعداد موجبة قطعاً بيّن أن $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$ نفترض، كما

أشرنا إلى ذلك، أن $a+b+c=1$ حيث تصير المتفاوتة على الشكل

$$2<\sqrt{\frac{a}{1-a}}+\sqrt{\frac{b}{1-b}}+\sqrt{\frac{c}{1-c}}$$

باستعمال المتفاوتة $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ نجد أن $\sqrt{\frac{a}{1-a}} \geq 2a$ يتحقق التساوي إذا كان $a = \frac{1}{2}$

نكرر الاستدلال بالمثل فنجد أن $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2(a+b+c)$ مما يتم البرهان

بالرجوع للافتراض $a + b + c = 1$ مع ملاحظة أن التساوي لا يمكنه أن يتحقق.

احسب قيمة $\frac{x+z}{y}$ تبعاً للشروط التالية:

$x > 0, y > 0, z > 0$ و $\frac{4x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 2$ (E)

جواب: بوضع $x + y = c, y + z = a, z + x = b$ يؤدي تحويل المتساوية (E) إلى:

$$\frac{(2b-a)^2}{2ab} + \frac{(2c-a)^2}{2ac} + \frac{(c-b)^2}{2bc} = 0$$

ونتيجة لذلك نجد أن $2b = a = 2c$ وبالتالي نستنتج أن $\frac{x+z}{y} = 1$.

بيّن أن $(1 + (n+1)a)^n < (1 + na)^{n+1}$ حيث a عدد حقيقي موجب قطعاً و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

جواب: يمكن استعمال طريقة التصغير التسلسلي التي تمت الإشارة لها في مكون

الحسابيات كالتالي، نكتب

$$1 + (n+1)a = \frac{1 + (n+1)a}{1 + na} \times \frac{1 + na}{1 + (n-1)a} \times \ldots \times \frac{1 + 2a}{1 + a} \times \frac{1 + a}{1}$$

باعتبار أن $\frac{1+(n+1)a}{1+na}$ تحدد أصغر نسبة في الجداء بالطرف الثاني للمتساوية، يؤدي

ذلك إلى $1 + (n+1)a < \left(\frac{1+(n+1)a}{1+na}\right)^{n+1}$ بالاختزال نحصل على النتيجة.

4- أمثلة إضافية في الجبر من أجل الاستئناس بمضامين المقرر الأولمبي

1.4-

- احسب القيمة العددية لـ $A=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$

علماً أن $xyz=1$.

- احسب المجموع $x+y$ علماً أن y و x عددان حقيقيان بحيث:

$$\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\times\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)=1 \quad x,y\in IR$$

- عمّل التعبير الجبري a^4+4b^4 يمكن ملاحظة

$$a^4+4b^4=a^4+4a^2b^2+(2b)^2-(2ab)^2$$

- عمّل التعابير التالية:

a) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120$

b) x^8+x+1

2.4- نظمات جبرية

يتم التناول التدريجي لنظمات جبرية بأكثر من مجهولين، مثل النظمات التالية:

1) $\begin{cases}x+y=5\\y+z=6\\x+z=7\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+2y=5;y+2z=8\\z+2u=11\\u+2x=6\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y=2\\xy-z^2=1\end{cases}$

3.4- معادلات دوالية

- نعتبر دالة f تحقق $f(m+n)=f(m)+f(n)$ لكل عددين صحيحين طبيعيين n وm، احسب $f(n)$ بدلالة n علماً أن f(1)=3.

- أوجد جميع الحدوديات P بحيث $P(x-1)+2P(x+1)=3x^2-7x$

- أوجد جميع الدوال، في كل حالة مما يلي، بحيث يكون لكل عددين x و y:

$$[f(x+y)]^2 = [f(x)]^2 + [f(y)]^2$$

$$f(x) \times f(y) - f(xy) = x + y$$

- أوجد في المثالين جميع الدوال بحيث يكون لكل عددين x و y:

$$xf(y) - yf(x) = 0 \qquad ; f(x+y) = f(x) + f(y) - b$$

كما يمكن بحسب مستوى التلاميذ تناول المثال

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

- حدّد جميع الدوال بحيث يكون لكل عددين صحيحين نسبيين a و b

$$f\big(f(a) + f(b)\big) = a + b - 1$$

4.4- متفاوتات جبرية

- قارن العددين 513^{18} و 127^{23} (يمكن استعمال قوى العدد 2 ...)

- برهِن أن $(+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}} > a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$ لكل عددين a و b موجبين قطعاً.

- مهما تكن الأعداد الموجبة قطعاً a, b وc بين $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > 3/2$

- بيّن، لكل عددين موجبين قطعاً a, b ، أن: $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{1}{4} + \frac{a+b}{2}$

- بيّن أن $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{1-a}{1-b} + \frac{1-b}{1-a}$: $0 < a \leq \frac{1}{2}; 0 < b \leq \frac{1}{2}$

- a, b, c, d أعداد حقيقية غير منعدمة جداؤها 1 بيّن أن:

$$ab + bc + cd + da \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$$

- بيّن أن

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} \qquad a, b, c > 0$$

- بيّن لكل عدد $x > 1$ أن $\frac{2}{x} \geq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ في إطار استئناس التلاميذ بالمتفاوتات المرجعية، يمكن مثلاً توظيف المتتالية بين الوسط الحسابي و الوسط التوافقي :

$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ باعتبار $a = \frac{1}{x+1}\ ; b = \frac{1}{x-1}$.

5.4- متفاوتات هندسية

يستأنس التلاميذ بالتأويل الهندسي لمتفاوتة الوسطين الحسابي والهندسي وكذلك باستعمالات متعددة ومتنوعة للمتفاوتة المثلثية، يمكن تناول بعض المتفاوتات التي لها علاقة بالمساحة، باستعمال صيغة مساحة مثلث $S = \frac{ah}{2}$ أو $S = pr$ حيث p نصف محيط المثلث و r شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث، ودفع التلاميذ لاكتساب بعض الحقائق الأولية مثل $S \leq \frac{ab}{2}$ حيث a وb ضلعين من أضلاع المثلث؛ إذا كانت المسألة تتضمن تعابير جبرية من الدرجة 2 مثل $a^2 + b^2$ أو ab فإن ذلك يؤشر إلى ملائمة استعمال المساحة، مع إمكانية دمج أدوات ومفاهيم هندسية أخرى حتى يتعود التلميذ استعمال أكثر من فكرة واحدة وأداة واحدة، كقاعدة لحل جل المسائل الأولمبية.

- إذا كانت a وb وc وd قياسات أضلاع رباعي محدب (في منحى دوران عقارب الساعة) فإن مساحته S تحقق $S \leq \frac{ab+cd}{2}$ وكذلك $S \leq \frac{(a+b)(c+d)}{4}$.

- لتكن a وb وc قياسات أضلاع مثلث مساحته 2 بحيث $a \leq b \leq c$.
بيّن أن $b \geq 2$.

- ليكن ABC مثلثاً و M نقطة بداخله. بيّن أن للمثلثين ABM و BCM نفس المساحة إذا وفقط إذا كانت النقطة M تنتمي لمتوسط المثلث المار من الرأس B.

- ليكن m_a طول متوسط المثلث ABC المار من الرأس A. بين أن $m_a < \frac{AB+AC}{2}$.
نكمل رسم المثلث بحيث يكون m_a نصف طول قطر لمتوازي أضلاع ثم نستعمل المتفاوتة المثلثية.

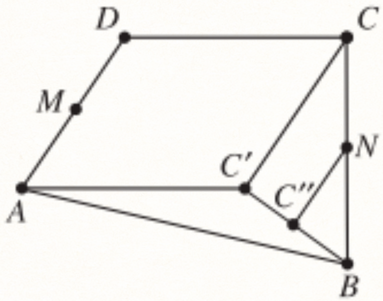
- أوجد تأطيرا لمجموع أطوال متوسطات مثلث $m_a + m_b + m_c$

- لتكن M نقطة داخل مثلث ABC بين أن $MA + MB + MC > \frac{a+b+c}{2}$

- ليكن ABCD رباعياً. النقطتان M وN هما على التوالي منتصفا القطعتين [AD] و [BC]. بيّن أن $MN \leq \frac{AB+CD}{2}$.

جواب. نكمل إنشاء متوازي أضلاع ADC′B كما يوضح الشكل التالي، فيصبح لدينا MDC″N أيضا متوازي أضلاع حيث النقطة C″ منتصف [C′C].

$$MN = DC'' \leq \frac{DC'+DC}{2} = \frac{AB+CD}{2}$$



- نختار نقطة واحدة من كل ضلع من أضلاع مستطيل معلوم، ثم ننشئ رباعيا. بين أن محيط هذا الرباعي أكبر من أو يساوي ضعف قطر هذا المستطيل.

- أسئلة متنوعة.

في المتفاوتتين التاليتين نعمل على إظهار مجاميع مربعات جبرية

- بين لكل أعداد x وy وz أن $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$

- بين لكل عدد x أن $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 > 0$

- بين انه إذا كان $x + y = z + t$ و$x^2 + y^2 = z^2 + t^2$ فإن

$$x^{100} + y^{100} = z^{100} + t^{100}$$

-حل المعادلة $4^{x-28} + 4^{2x-60} = 80$

- من المفيد للتلاميذ تعرف الصيغة المختصرة للمجموع الجبري وذلك بحساب الجداء aS

حيث $a \neq 1$،

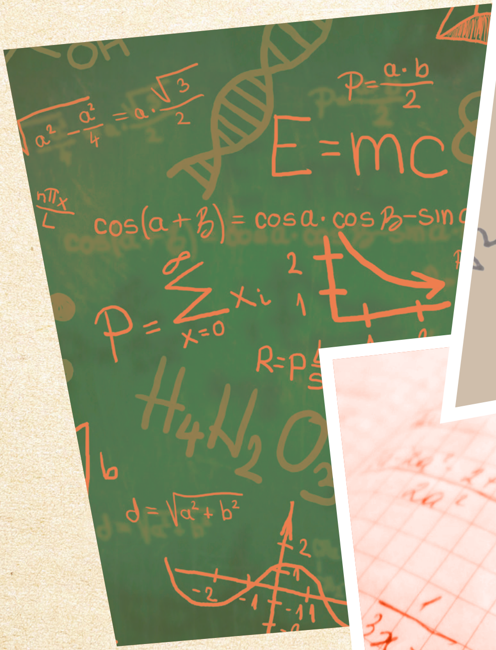
$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots a^{n-1}$$

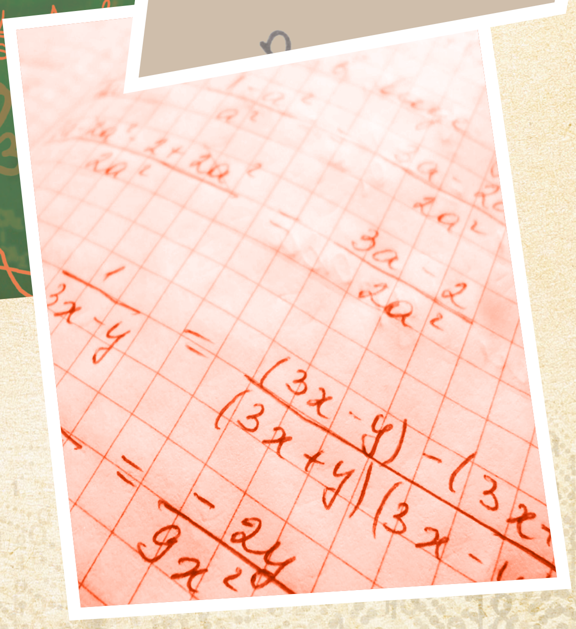
- لدينا $S - aS = 1 - a^{n+1}$ وبالتالي فإن $S = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

تطبيق: احسب قيمة الكسر $\frac{4\times10^{2021}-1}{4\times3333....3+1}$ علماً أن الرقم 3 يتكرر في كتابة العدد

3.... 3333 في نظمة العد العشري 2021 مرة.

مكون نظرية الأعداد





مكون نظرية الأعداد

مكون نظرية الأعداد

إن نظرية الأعداد في أولمبياد الرياضيات، أو ما يعرف بالحسابيات في المقرر الدراسي، تعد مجالاً شاسعاً لدراسة الأنشطة العددية المتعلقة بالأعداد الصحيحة النسبية أو الأعداد الجذرية.

يعتبر مفهوما قابلية القسمة والقسمة الإقليدية، من المفاهيم البسيطة نظرياً، ذوي أهمية كبرى عند تحليل وضعيات حسابياتية. هنا تشكل الأعداد الأولية اللبنة الأساس لبناء جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية والنسبية، حيث يفيد مضمون المبرهنة الأساسية في الحسابيات إمكانية تفكيك كل عدد صحيح إلى جداء عوامل أولية، ما يفتح المجال لاستعمال تقنيات كثيرة كـ: "la Valuation p- adic" وخاصياتها،

ونشير إلى أن نظرية الأعداد في المجال الأولمبي، تستعمل أحياناً أدوات جبرية متطورة مثل "polynômes cyclotomiques" والبواقي التربيعية (résidus quadratiques) والتفكيك في الحلقات (خصوصاً عند البحث عن حلول لمعادلات ديوفانت (Diophante.

ومن بين الموضوعات التي يمكن تناولها والتركيز عليها، في فصول مستويات السلك الثانوي الإعدادي، وضعيات حول الزوجية (مثلاً، التعبير $n(n+1)$ يكون دائماً عدداً زوجياً) وبصفة عامة تناول مفهوم المضاعفات والقواسم لأعداد صحيحة نسبية وكذا القسمة الإقليدية وحلول بعض الأصناف البسيطة لمعادلات ديوفانت، وتناول حدوديات معاملاتها أعداد صحيحة نسبية أو جذرية.

1- توجيهات منهجية

تتميز نظرية الأعداد بتضمنها عدة مسائل مفتوحة سهلة الفهم، حتى بالنسبة لغير المختص، كما في المثالين التاريخييْن الآتيين:

- مظنونة Goldbach: يمكن كتابة كل عدد زوجي أكبر من أو يساوي 4 كمجموع لعددين أوليين.

- مبر هنة المربعَيْن: كل عدد أولي يكون باقي قسمته الإقليدية على 4 يساوي 1، مثل الأعداد 13 أو 53، هي مجموع مربعيْن كامليْن $53 = 7^2 + 2^2$ و $13 = 2^2 + 3^2$.

وعليه فإن من بين ما ينبغي أن يتعود عليه التلاميذ، في التعامل مع أنشطة نظرية الأعداد، تناول عدد كبير من الأمثلة العددية، من أجل التمحيص وتعرف النمط الناظم للمسألة الموضوعة، وبالتالي صياغة مظنونات رياضياتية والتدرب على البرهنة عليها، مع إتاحة فرص متعددة لتوظيف البرهان بالخلف أو براهين أخرى مناسبة.

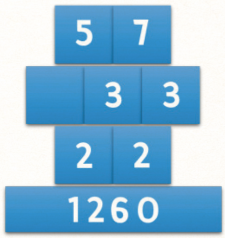
إن سلاسة مفاهيم نظرية الأعداد ستجعل من مواضيعها المقترحة مدخلاً يراعي مكتسبات التلاميذ ويرتقي بها، وذلك في تناغم مع باقي مكونات المقرر الأولمبي.

2- القدرات المنتظرة من المقرر الأولمبي لمكون نظرية الأعداد

يتم تدريب المتعلمين من خلال محتويات هذا الفصل لجعلهم، على سبيل المثال لا الحصر، قادرين على:

N1	تحليل وضعية عامة في إطار خاص، ثم تظنن الحالة العامة وحلها كلما كان ذلك ممكناً (انظر مثلاً التمارين 2، 3، 6، 7)
N2	تعرف قابلية القسمة على 2، 3، 4، 5، 6، 7 في وضعيات مألوفة (انظر مثلاً التمرينين 18، 19)
N3	استعمال المبرهنة الأساسية للحسابيات لتحديد مجموعة قواسم عدد واستثمار القاسم المشترك الأكبر (انظر مثلاً التمرينين 11،12)
N4	الاستئناس بتفكيك عدد لمجموع مربعات كاملة (انظر مثلاً التمارين 8، 9، 10)

جدول محتويات المقرر الأولمبي في نظرية الأعداد

المستوى	المحتوى	توجيهات
السنة أولى إعدادي	العمليات الأربعة : تناول تعابير تضم سلسلة من العمليات المركبة. تناول أنشطة حول القسمة الإقليدية لعددين. - التذكير بمفاهيم قواسم ومضاعفات عدد، عدد أولي، كتابة عدد كجداء لقوى أعداد أولية مثلاً $1260=126\text{x}10=2\text{x}2\text{x}3\text{x}3\text{x}5\text{x}7$  - تقنيات عامة حول التعميم (من الخاص إلى العام) بناء الأمثلة المضادة تحليل واكتشاف النمط الناظم	- توظيف خاصية توزيعية الضرب بالنسبة للجمع في الاتجاهين، لاختصار الحساب. - استثمار مكتسبات التلاميذ، - السادسة ابتدائي- حول القواسم والقاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين والكتابة العشرية لعدد. - ربط قاسم عدد بقسمة مضبوطة وتناول وضعيات يكون فيها المقسوم عليه مجهولا والقاسم وباقي القسمة معلومين. - ربط القواسم بتفكيك عدد إلى جداء أعداد أولية مثلاً إذا كان m عدداً زوجياً فإن العدد $3m$ قابل للقسمة على 6. - يتم تناول وضعيات مثل: تحديد العدد ذي الرتبة 100 في القائمة ,...,1,4,7,10,13 أو تحديد الرقم مثلا ذي الرتبة 2021 في العدد ...123456789101112131415161718 - مثلاً، مجموع مربعين ليس دائماً مربعاً. -جداء قاسمين لعدد ليس دائما قاسما لهذا العدد. - يتم تناول وضعيات فيها أعداد ويكون المتعلم مطالبا بإتمام سلسلة العمليات الناقصة لتحصيل النتيجة المطلوبة مثل : أتمم باستعمال عمليتي الجمع والطرح لتكون النتيجة صحيحة $13\ldots17\ldots3\ldots4\ldots7 = 10$.

المستوى	المحتوى	توجيهات
السنة ثانية إعدادي	- مبادئ أولية في الحسابيات - الزوجية وبعض خاصياتها	- تناول وضعيات في الزوجية وإدراج بعض خاصياتها مثل زوجية مجموع وفرق وجداء عددين صحيحين وزوجية مربع عدد أو قوة عدد.
	- القسمة الإقليدية باستعمال الحرف	- يتم توضيح شروط القسمة الإقليدية لعدد Nعلى m وإيلاء أهمية خاصة للحالة التي يكون فيها باقي القسمة r منعدما والتي تؤدي إلى الارتقاء بمكتسبات المتعلم حول القواسم والمضاعفات من سياق أعداد معلومة إلى إطار عام يستعمل الحرف. $$N = qm + r,\ 0 \leq r < m$$ - استكشاف خوارزمية إقليدس على الأعداد ثم على تعابير حرفية. القاسم المشترك الأكبر لعددين هو آخر باقي غير منعدم في القسمات المتتالية. مثلاً القاسم المشترك الأكبر لـ 451 و287 يساوي 41.
	- المربعات الكاملة	- كل عدد صحيح طبيعي N يحقق $n^2 < N < (n+1)^2$ لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً. - كل عدد زوجي ومربع كامل يكون مضاعفاً للعدد 4. كل عدد فردي ومربع كامل يكون 1 هو باقي قسمته على 4 . - ضرورة تذكر المربعات الكاملة، على سبيل المثال، إلى حدود $25^2 = 625$.

المستوى	المحتوى	توجيهات
السنة ثانية إعدادي	- الأعداد المثلثية	- يتم تناول الأعداد المثلثية من التمثيل الهندسي للأعداد 1، 3، 6، 10، 15، ... وإدراج الصيغة العامة للعد المثلثي من الرتبة k الذي نرمز له بـt_k $t_k = 1 + 2 + \cdots .. k = \frac{k(k+1)}{2}$. تتم البرهنة على أن $t_k + t_{k+1}$ يكون مربعاً كاملاً وأن $9.t_k + 1$ يكون مثلثياً. - يمكن الإشارة إلى خاصية كون كل عدد صحيح طبيعي يمكن كتابته على شكل مجموع لثلاثة أعداد مثلثية، وحث التلاميذ على التحقق منها في حالات متعددة.

المستوى	المحتوى	توجيهات
السنة ثالثة إعدادي	- المبرهنة الأساسية للحسابيات - تعريف عددين أوليين فيما بينهما (قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1) - جداء قاسمين أوليين فيما بينهما لعدد A هو أيضاً قاسم للعدد A. - إذا كان العدد pA قابلاً للقسمة على pq وكان العددان p وq أوليان فيما بينهما فإن العدد A هو أيضاً	- يتم تقديم المبرهنة الأساسية بالحروف وتوضح على أمثلة نسبيا مركبة ثم تطبق في وضعيات مثل: $x = 2^{a+1} \times 5^2 \times 11$ يقسم $2^a \times 5$ وأن 2^{a+2} لا يقسم x. - التمكن من خوارزمية تفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية. - جداء ثلاثة أعداد متتابعة يكون قابلاً للقسمة على 6... - كل عددين أوليين مختلفين هما أوليان فيما بينهما، العدد 1 أولي مع جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية. - قبل صياغة هذه المبرهنة الهامة، يتم الانطلاق من

	قابل للقسمة على q . - مقاربة أولية لمفهوم توافق عددين تعريف التوافق - خاصيات التوافق مع الانتباه لقوة عدد - تقنية البرهان بالخلف - معادلات ديوفانت: حل معادلات تؤول في حلها إلى $ax+by=c$	وضعيات ملموسة مثل: إذا كان العدد 5A قابلاً للقسمة على 3 فإن العدد A هو أيضاً قابل للقسمة على 3. . نعرف $x \equiv y[n]$ بتساوي باقي قسمة x على n مع باقي قسمة y على n. . نبين انسجام التوافق مع عمليات الجمع والضرب، بطريقة بسيطة بجمع/ ضرب $N=qm+r$ و $N'=q'm+r'$ ، يتم تناول تطبيقات مثل حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2017^3+2018\times2019\times2020$ على 4. - في مرحلة ثانية يمكن استثمار التوافق بشكل مباشر للتبسيط، وبدون اللجوء للقسمة الإقليدية. نحدد، في جدول، موافق x^2,x^3 بالنسبة ل 2,3,4,5,6,7 يعني تعرف بواقي تلك التعابير في القسمة الاقليدية على، توالياً، 2,3,4,5,6,7,8. هنا وجب الإشارة إلى تقنية فصل الحالات لتحليل الوضعية. . دراسة موافقات عدد زوجي (ثم عدد فردي) بالنسبة ل 4، 8. . نبين لا جذرية $\sqrt{2}$ بتوظيف الزوجية والشكل المختزل لعدد جذري. هنا يمكن الإشارة للبرهنة بطريقة "descente infinie". . هل يمكن أن نجد عددين (x,y) بحيث $4x-8y=1$ أو $xy=2x+3y$.؟ - حل المعادلة $x^2-y^2=5$ باستعمال قواسم العدد 5. - حل المعادلة $y^2=x^2+21$ ، ...

3- أمثلة لوضعيات تستهدف تنمية القدرات المنتظرة

ليكن a و b عددان صحيحان طبيعيان بحيث يكون مجموعهما عدداً فردياً. هل يمكن للجداء

$a \times b$ أن يكون عدداً فردياً؟

جواب: يكون المجموع a+b فردياً إذا وفقط إذا كان العددان a و b مختلفي الزوجية أي أن أحدهما زوجي والآخر فردياً وبالتالي فإن الجداء $a \times b$ يكون دائما عدداً زوجيا.

رقم وحدات العدد 2163 يساوي ثلاث مرات رقم مئاته، بينما رقم عشراته يساوي ضعف مجموع رقمي المئات والآلاف. هل كل عدد من هذا الصنف قابل للقسمة على 3 ؟

جواب:

نتحقق أن مجموع أرقام كل عدد من هذا الصنف مضاعف للعدد 3 إذن هو قابل للقسمة على 3.

يكتب عدد N في نظام العد العشري بواسطة الأرقام 2 , 1 ,0 جنبا إلى جنب، موزعة كالتالي:

مائة صفر ومائة 1 ومائة 2.

هل يمكن أن يكون العدد N مربعاً كاملاً؟

جواب: مجموع أرقام العدد N يساوي 100(0+1+2)=300 هذا المجموع قابل للقسمة على 3 وليس قابلاً للقسمة على 9 إذن فالعدد قابل للقسمة على 3 وليس قابلاً للقسمة على 9. وبالتالي لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً.

ملاحظة: أجب على السؤال نفسه في حالتي

أ) العدد N مكون من 200 من الأصفار و200 من 1 و200 من 2.

ب) العدد N مكون من 300 من الأصفار و300 من 1 و300 من 2.

p و q عددان أوليان مختلفان. حدّد عدد قواسم كل عدد مما يلي : pq p^2q^2, qp^2 , وبصفة عامة p^nq^m.

جواب: لدينا أربعة قواسم بالنسبة للجداء pq قواسمه هي على التوالي 1 وp وq و pq. أوجد عدد القواسم بالنسبة للعددين p^2q^2 وqp^2 . بالنسبة للعدد p^nq^m ، عدد قواسم العامل p^n يساوي (n+1) هذه القواسم هي

$1, p, p^2, p^3, \dots \dots . . p^n$ بالمثل لدينا عدد قواسم العامل q^m يساوي (m+1) إذن باستعمال قاعدة الجداء (أنظر مكون التركيبات) إذن فعدد قواسم العدد p^nq^m يساوي (m+1) (n+1).

بيّن أن العدد $n^3 + 2n$ يكون دائماً قابلاً للقسمة على 3 مهما تكن القيم التي يأخذها n .

جواب: علماً أن باقي القسمة للعدد n على 3 يمكن أن يساوي فقط أحد القيم 0 أو 1 أو 2 فإننا سنقوم بدراسة حالة بحالة. (كما يمكن الاستعانة أيضاً مباشرة بجدول التوافقات المشار إليه في التوجيهات)

- إذا كان باقي القسمة للعدد n على 3 يساوي 0 فإن كلاً من n^3 و$2n$ قابلين للقسمة على 3.

- إذا كان باقي القسمة للعدد n على 3 يساوي1 فإن باقي القسمة لـ n^3 يساوي 1 وباقي القسمة لـ 2 يساوي 1 إذن باقي قسمة $n^3 + 2n$ على 3 يساوي 2 +1 وهو قابل للقسمة على 3.

- إذا كان باقي القسمة للعدد n على 3 يساوي2 فإن باقي قسمة n^2 يساوي 1 ومنه باقي قسمة n^3 يساوي 2، وحيث أن باقي قسمة $2n$ يساوي 4 فإن باقي قسمة $n^3 + 2n$ يساوي 2+4 كذلك قابل للقسمة على 3.

ملاحظة: يمكن تناول الوضعيات التالية في السياق ذاته:

- بيّن أن $n^5 + 4n$ قابل للقسمة على 5 مهما تكن القيم التي يأخذها n.

- بيّن أنه لا توجد أي قيمة لـn بحيث يكون $n^2 + 1$ قابلاً للقسمة على 3.

- بيّن أنه لا توجد أي قيمة لـn بحيث يكون $n^3 + 2$ قابلاً للقسمة على 9.

ما رقم وحدات العدد 1989^{1989} في نظمة العد العشري؟

جواب: هذا الرقم هو 9. نلاحظ أولاً أن رقم وحدات العدد 1989^{1989} هو نفسه رقم وحدات العدد 9^{1989} . نحدد، في جدول رقم وحدات بعض قوى 9 (مثلاً الخمس الأولى). إذا كان 9 هو رقم وحدات قوة فإن 1 هو رقم وحدات القوة التالية لأن $9 \times 9 = 81$، أما إذا كان 1 هو رقم وحدات قوة فإن 9 هو رقم وحدات القوة التالي ($9 \times 1 = 9$).

n	رقم وحدات 9^n
1	9
2	1
3	9
4	1
5	9

حدّد القاسم المشترك الأكبر للعددين 2n+13 وn+7 حيث n عدد صحيح طبيعي.

جواب: نستعمل خوارزمية إقليدس بقسمتين متتاليتين نجد أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2n+13 وn+7 يساوي 1 أي أنهما أوليان فيما بينهما

$$2n + 13 = 1 \times (n + 7) + n + 6$$

$$n + 7 = 1 \times (n + 6) + 1$$

بيّن أن العدد الكسري $\frac{12n+1}{30n+2}$ لا يمكن اختزاله مهما تكن قيمة n .

جواب: نستعمل خوارزمية إقليدس كما في المثال السابق.

بيّن أن $p^2 - 1$ قابل للقسمة على العدد 24 علماً أن p عدد أولي أكبر قطعاً من 3.

جواب: بما أن عدد أولي فإنه عدد فردي وبالتالي p=2k+1 ومنه $p^2 - 1$ = 4k(k+1)

إذن لدينا النتيجة (1)

$p^2 - 1$ قابل للقسمة على 8 . وبما أن p و p- 1 و p+1 ثلاثة أعداد متتابعة فإن أحدها سيكون قابلاً للقسمة على 3. وحيث أن العدد p ليس قابلاً للقسمة على 3 فحتماً أحد العددين p- 1 أو p+1 قابل للقسمة على 3 ومنه النتيجة (2) $p^2 - 1$ قابل للقسمة على3.

ومن النتيجتيْن (1) و(2) نجد أن $p^2 - 1$ قابل للقسمة على 24 .

في نظام العد العشري، يتكون عدد من الرقم 1 ثلاث مرات وبقية الأرقام أصفار.

هل يمكن أن يكون هذا العدد مربعا كاملاً؟

جواب: يكون من المفيد تحسيس التلاميذ ببرهان الخلف، كالتالي : هذا العدد هو قابل للقسمة على 3 وليس قابلاً للقسمة على 9 لأنه مجموع ثلاثة قوى للعدد 10، إذا افترضنا أنه مربع كامل فإنه سيكون أيضاً قابلاً للقسمة على 9 وهذا تناقض.

4- أمثلة إضافية في نظرية الأعداد من أجل الاستئناس بمضامين المقرر الأولمبي

- لتكن a, b, c أعداداً صحيحة طبيعية. برهن أن أحد الأعداد الثلاث التالية، على الأقل، عدد صحيح طبيعي $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$.

ملاحظة هامة: يعد هذا السؤال فرصة للدمج والتوليف بين أدوات مجاليْ الحسابيات والتراكيب عند الاستدلال. حيث، نلاحظ أولاً أن من بين الأعداد الثلاث a, b, c يوجد على الأقل عددان لهما نفس الزوجية (مبدأ Dirichlet) نفترض مثلاً أن c و a لهما نفس الزوجية إذن $\frac{c+a}{2}$ سيكون عدداً صحيحاً طبيعياً.

- ادرس زوجية عدد قواسم عدد صحيح طبيعي a. يمكن فصل الحالات إلى : a مربع كامل و a ليس بمربع كامل.

- بيّن أن جداء ثلاثة أعداد متتالية قابل للقسمة على 3. أعط تعميماً لهذه الخاصية.

- ليكن a, b عددين صحيحين طبيعيين متتاليين و c=ab. ادرس زوجية العدد K علماً أن $K^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

- هل يمكن توزيع كتب عددها 2k (k عدد صحيح طبيعي موجب قطعاً) في 7 علب بحيث يكون عدد الكتب في كل علبة عدداً فردياً؟

- لتكن $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ n عدداً قيمة كل واحد منها إما 1 أو -1 وبحيث يكون $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$. بيّن أن n مضاعف للعدد 4.

ملاحظة : يمكن وضع الأعداد x_i على دائرة لتمثل الترتيب الدائري للجداءات $x_i x_{i+1}$.

- نضع إحدى العمليتين + أو − بين كل عددين من الأعداد المتتالية $1,2,3, \dots ,2019$.

هل النتيجة النهائية لهذه العملية الحسابية ستكون عدداً زوجياً أم عدداً فردياً؟

(علّل جوابك)

- ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً. بيّن أن كل عدد من الأعداد التالية ليس مربعاً كاملاً :

$3n+2$,$5n+2$,$5n+3$, $n(n+1)$.

- بيّن أن كل عدد من أعداد القائمة التالية ليس مربعاً كاملاً 11، 111، 1111،

11111،....

- أوجد جميع الأزواج (x,y) المكونة من عددين صحيحين طبيعيين بحيث

$x^2+y^2=7$.

- أوجد علاقة بين العددين الصحيحين الطبيعيين x و y علماً أن

$12^{3x+2}=18^{2y-1}$ ثم حدّد وجودهما من عدمه.

- حُل المعادلة $2^y-2^x=2$. لاحظ أن $y>x$.

- أوجد جميع الأعداد الصحيحة النسبية x ليكون العدد A عدداً صحيحاً نسبياً

$$A=\frac{9x^2-36}{4-12x-6x^2+3x^3}$$

- أوجد جميع الأعداد x و y بحيث

نقوم بتحويل كتابة هذه المتساوية على $55x(x^3y^3+x^2+y)=446(xy^3+1)$

الشكل:

$$x^3+\frac{1}{y^2+\frac{1}{xy}}=8+\frac{1}{9+\frac{1}{6}}$$

و يتم استنتاج الحل $x=2; y=3$). (نشر الكسور المتصلة).

- اكتب المجموع التالي على شكل عدد جذري

$$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}$$

يوظف التلاميذ مثلاً العلاقات

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} \text{ أو } \frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right)$$

بحيث سنلاحظ أن مقام كل حد من حدود هذا المجموع يكتب على شكل $k(k+2)$

وبالتالي:

$$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\dots+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)=\frac{18}{39}$$

ملاحظة هامة : يتدرب التلاميذ تدريجياً على تقنية التصغير التسلسلي télescopage.

- حدّد زوجية الجداء وقيمته

$$A=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots\left(2^{2^n}+1\right)+1$$

نلاحظ أن $A=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots\left(2^{2^n}+1\right)+1$

باستعمال متطابقة هامة $a^2-b^2=(a-b)(a+)$

وتطبيقها بشكل متتال نجد أن $A = 2^{2^{n+1}} - 1 + 1 = 2^{2^{n+1}}$.

- الأعداد المتناظرة هي الأعداد التي كتابتها العشرية تقرأ من اليمين إلى اليسار كما من اليسار إلى اليمين. مثلاً 2002 و12321 هما عدادان متناظران.

بيّن أن كل عدد متناظر، كتابته في نظمة العد العشري مكونة من عدد زوجي من الأرقام، يكون قابلاً للقسمة على11.

- نفترض أن 7 يقسم $a^2 + b^2$ بيّن أن 7 قاسم مشترك لـ b و a .

- حدّد جميع الأعداد الصحيحة حلول المعادلة $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$.

- ليكن N بحيث يكون عدد قواسمه فردياً. برهن أن العدد N مربع كامل.

- إذا علمت بأن أي تاريخ من التواريخ الأربع في إحدى السنوات: 20 غشت و1شتنبر و23 أكتوبر و26 دجنبر، لم ينطبق مع يوميْ السبت والأحد، فماذا كان آخر يوم من تلك السنة؟

- يتكون عدد N من 2020 رقماً كل رقم منها يساوي 2. كم يوجد من رقم 7 في الكتابة العشرية لخارج قسمة العدد N على 3؟

- m و n عددان صحيحان طبيعيان بحيث 65m= 56n. بيّن أن العدد m+n ليس أولياً.

- أوجد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث يكون العدد $2^n + 9$ مربعاً كاملاً.

مكون التراكيب

مكون التراكيب

مكون التراكيب

يعتبر مكون التراكيب في المباريات الدولية لأولمبياد الرياضيات من أهم المكونات التي تحدد بشكل كبير مراتب المتبارين الحاصلين على الميداليات، حيث لا تخلو اختبارات كل دورة أولمبية من مسائل التراكيب، بشكل صريح أو ضمني من خلال تداخلها مع المحاور الثلاث الأخرى. لقد أشارت عدة أبحاث تربوية[1] بأن مفاهيم التراكيب لا تحظى بالعناية الكافية ويتم إهمالها في مقررات الرياضيات المدرسية. وحيث أن مجال التراكيب يستمد جل محتوياته من وضعيات ملموسة، فإنه يمكن استثمار سياقات متنوعة لطرح وضعيات ملائمة لتلاميذ جميع مستويات التعليم. تلك الوضعيات التي يمكن حلها بطرق متعددة وباستعمال خطاطات ورسومات لتمثيل الوضعية. وحتى يتسنى تحقيق نقطة انعطاف في مشاركة بلادنا بالتظاهرات الدولية، ينبغي بذل مجهودات استثنائية لوضع اللبنات الأساس للبناء، من حيث هندسة مضامين التكوين أو من حيث تحفيز التلاميذ على الاستئناس بأساليب الاستدلال في مجال الرياضيات المنفصلة mathématiques discrètes، وإكسابهم القدرة على حل فئة المشكلات المتضمنة للتراكيب، بدون اشتراط مسبق لمكتسبات معرفية استثنائية (أنظر نموذج المثال 2). لذا يتم الانطلاق من أنشطة واقعية تكون مفهومة بدون غموض، تثير فضول المتعلمين وتحفزهم على مباشرة حلها بواسطة معارفهم السابقة. والاستفادة من خبرة وتجربة بعض الدول الرائدة في مجال التباري، التي تنبهت مبكرا لأهمية التراكيب في الارتقاء بمستوى التفكير الرياضياتي للتلاميذ، بصفة عامة وللمتبارين بشكل خاص؛ ومن ثم وجب التفكير في

[1] Lyn D, 2007

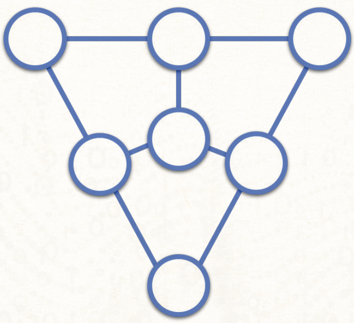
إدماج موضوعات التراكيب موزعة بشكل تدريجي ومتوازن، في مناهج مختلف الأسلاك التعليمية بدءا بالتعليم الابتدائي، ليرتقي مستوى تناولها ويتداخل، مع بقية المجالات من بين جبر وهندسة ونظرية أعداد، في التعليم الثانوي بسلكيه.

إن مسائل التراكيب تعد مجالاً خصباً في الرياضيات الأولمبية، غالباً ما يكون موضوعها تعداد أو لعبة محددة القواعد والأدوار، يتطلب حلها إرساء نمط التفكير بالاستراتيجيات الرابحة.

1- توجيهات منهجية

- **بالنسبة للمؤطر:** من بين أولويات المقرر الأولمبي جعل المتعلم(ة) أمام فئة من الوضعيات المشكلة المتنوعة وغير مألوفة، لدفع المتعلم(ة) إلى إبداع توليفة من الأفكار المبتكرة والاستئناس بأنماط استدلالية مناسبة وفعالة. وجدير بالذكر أن هذه الوضعية المشكلة، ينبغي أن لا يطرح موضوعها وإشكالها أي غموض، ونورد فيما يلي مثالاً بهذا الخصوص:

مثال: ضع الأعداد 7 ،.....،3، 2، 1 بشكل مناسب في خانات الشكل التالي ليكون مجموع خانات الرباعيات في الأركان الثلاثة يساوي 15.



بالنسبة لوضعيات مجردة، يستحسن توضيحها، في البداية بواسطة أمثلة عددية ثم صياغة الخاصية في إطار عام واستثمارها، بعد ذلك، في سياقات عامة ومتنوعة.

- **بالنسبة للمتعلم(ة):** يتدرب على استعمال خطاطات وأساليب استدلالية تعتمد **الحدس** و**المناولة**، وذلك من خلال دراسة متدرجة الصعوبة لطيف شاسع ومتنوع من الوضعيات، وعدم الاكتفاء، فقط، بتعرفه على الصيغة المناسبة للحل وتطبيقها بشكل آلي. ومن أجل تحقيق تلك الغاية واكتساب عادات مفيدة في منهجية حل مسائل التراكيب، نشجع المتعلمين على المناولة والتجريب فردياً أو في مجموعات مصغرة، لوضعيات مقتبسة، مثلاً من رقعة شطرنج أو من مكعب روبيك أو بعض الألعاب.

مثال1: في بداية لعبة كانت الأعداد 23 - 34- 42- 16 مكتوبة على السبورة، نختار من بينها عددين a وb نمسحهما ثم نعوضهما بالعددين a+4 و b+4 ونعيد العملية لعدة مرات متتالية. هل يمكن بعد عدد من المراحل أن نحصل على أربعة أعداد تكون كلها متساوية؟

جواب: لا يمكن ذلك، فعند كل مرحلة سنعوض كل عدد زوجي بعدد زوجي بإضافة 4 وكل عدد فردي سيعوض كذلك بعدد فردي وبالتالي لا يمكن الحصول على أربعة أعداد متساوية. نلاحظ في هذه الوضعية أن خاصية الزوجية صامدة لم تتأثر بمتغيرات اللعبة. من المهم أن يستأنس التلاميذ بملاحقة بعض خاصيات الصمود في وضعية تراكيباتية Principe de l’invariant واستعمال ذلك في الحل.

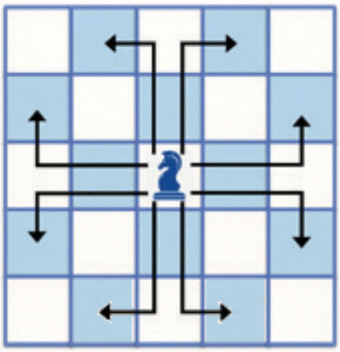
مثال 2: تحتوي خانة ركن من شبكة تربيعية من فئة 5x5 إشارة + وتضم بقية الخانات إشارة - . نقوم بتغيير إشارات خانات كل سطر وإشارات كل عمود بعكس كل إشارة. هل يمكن في مرحلة ما أن نحصل على إشارة+ في جميع خانات الشبكة؟

جواب: لا يمكن ذلك (نحل المسألة أولاً بالنسبة لشبكة من فئة 2x2) ثم نستنتج الحل بالنسبة للمسألة المطروحة أو لحالتها العامة.

مثال3: نعتبر رقعة شطرنج من فئة 5x5. ينطلق فارس (قطعة الحصان) من الركن أقصى يسار السطر الأسفل. ما هو أدنى عدد لتحركات قطعة الحصان لكي يتنقل إلى جميع خانات هذه الرقعة؟

جواب: القيمة الدنوية لعدد التحركات هو 4، علل ذلك برسم المسارات المناسبة لكي يستقر الحصان في كل خانة أنظر الجدول الأيمن. التحركات الممكنة لقطعة الحصان، تتم وفق الحرف L في اتجاهات مختلفة كما يبين الشكل يساره.

2	3	2	3	4
3	2	3	2	3
2	1	4	3	2
3	4	1	2	3
	3	2	3	2



مثال 4: املئ خانات شبكة تربيعية 5x5 بعلامتي + و – بحيث يفوق عدد + عدد – في جميع أسطر الشبكة، ماعدا في السطر الأول، ويكون العكس في جميع أعمدة الشبكة ماعدا في العمود الأخير. انظر جواباً مقترحاً أسفله.

+	+	+	+	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	-
-	+	-	+	-
+	-	+	-	-

مثال 5: نملئ خانات شبكة تربيعية 3x3 بأعداد علماً بأن كل عدد يساوي المعدل الحسابي لعددي الخانتين المحاذيتين. بيّن أن جميع الأعداد في الخانات متساوية.

جواب: نعتبر أكبر هذه الأعداد ونبين بأنه يساوي لكل من الأعداد المجاورة له أي الموجودة في الخانات المحاذية لخانته. ونستنتج بالتالي أن جميع الأعداد متساوية.

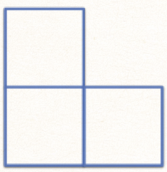
أنشطة في التقطيع :

- قسم بواسطة تقطيع مناسب كل شكل مما يلي إلى أربع قطع متقايسة.

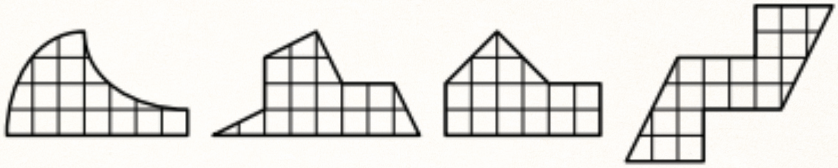
(3)

(2)

(1)



- قسِّم بواسطة تقطيعة مستقيمة واحدة كل شكل من الأشكال الأربعة، إلى جزئين تركبهما للحصول على مربع.



2- القدرات المنتظرة من المقرر الأولمبي لمكون التراكيب

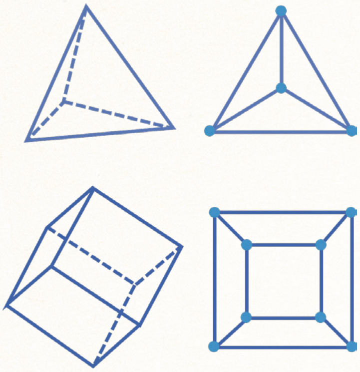
يتم تدريب المتعلمين من خلال محتويات هذا الفصل لجعلهم، على سبيل المثال لا الحصر، قادرين على:

C1 تنظيم المعلومات في جدول ذي مدخلين واستعمال شجرة الاختيارات لضبط عملية العد
C2 التمكن من حل وضعيات في التقطيع والترصيف
C3 تعرف مبادئ أولية لنظرية المبيانات graphes واستعمالها في حل المسائل.
C4 تعرف مبيان Euler وعلاقة Euler واستعمالهما في حل بعض المسائل التراكيبية
C5 حل مسائل العد باستعمال قاعدتيْ الجمع أو الضرب أو هما معاً.
C6 تعرف واستعمال قاعدة التضمن والاستثناء inclusion- exclusion أي $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$
C7 توظيف تقنيات العد المزدوج لحل وضعيات متنوعة.
C8 تعرف وتوظيف مبدأ Dirichlet في حل مسائل متنوعة.

جدول محتويات المقرر الأولمبي لمكون التراكيب

السنة أولى إعدادي	**• الأنشطة المبيانية** - تنظيم معلومات مسألة في جدول ذي مدخلين، - استعمال شجرة الاختيار لضبط عملية العد، - حل وضعيات في التقطيع والترصيف، - لتوضيح مبرهنة فيتاغورس، خاصية مجموع زوايا مثلث... - استثمار مفهوم المعدل الحسابي في حل بعض التمارين. **• مبادئ أولية في الهندسة التراكيبية** - يتم تناول وضعيات لعد بعض عناصر تشكيلات هندسية، تتكون من عدد منته من النقط ويتم تعرف أصغر مجموعة محدبة تحتوي النقط جميعها. Enveloppe convexe - تناول وضعيات بسيطة يستعمل فيها المتعلم(ة) مكتسباته في الهندسة الإقليدية. - مبرهنة (Gallai Sylvester). إذا كانت لدينا نقطاً من المستوى عددها n و $(n \geq 3)$ ، بحيث لا تنتمي كلها إلى مستقيم واحد، فإنه يوجد على الأقل مستقيم ، يمر من نقطتين بالضبط، من بين هذه النقط. **• تقنيات التلوين وحل مسائل التراكيب** -تناول وضعيات متنوعة في التلوين لبعض الخرائط والأشكال وذلك بدون أن يكون لجهتيْن متحاذيتيْن اللون نفسه (مبرهنةالألوان الأربعة). -نمذجة وضعيات تراكيبية، مثلا رقعة شطرنج، باستعمال التلوين ...

المستوى	المحتوى	توجيهات
السنة ثانية إعدادي	• **نظرية المبيانات (Théorie des graphes)** تقديم تعاريف (الرأس، الحرف، درجة رأس...) - تعريف درجة رأس مخطط تساوي عدد الأحرف التي تمر من هذا الرأس. - تعرف بعض خاصيات مسار Euler بتوظيف درجات رؤوسه، باستعمال الخاصيتين : أ) مجموع درجات الرؤوس يساوي ضعف عدد أحرف المبيان. ب) كل مبيان له رأسان، بالضبط، درجتهما عددان فرديان فيمكن إنشاؤه بدون رفع القلم انطلاقاً من الأس الفردية الأولى وانتهاءً بالرأس الفردية الثانية. ج) كل مبيان تكون جميع رؤوسه درجات زوجية، يكون قابلاً للإنشاء بدون رفع القلم انطلاقاً من أية رأس. • **مبدأ Dirichlet** - تعرف واستعمال مبدأ Dirichlet في صيغته البسيطة، للبرهنة على وجود حل، على الأقل، للمشكلة المطروحة : - إذا وضعنا n+1 كرة فيn صندوق (بدون أن يبقى أي صندوق فارغاً) فإن صندوقاً واحداً على الأقل سيحتوي على كرتين. - علاقة Euler في المجسمات الاعتيادية، يكون لدينا $F + S - A=2$ حيث يمثل A, S, F على التوالي عدد الوجوه، الرؤوس والأحرف.	- يتم الانطلاق من دراسة أمثلة بسيطة مرفقة بأشكال توضيحية، مبيانات بسيطة توظف مثلا لتأمين هاتف ذكي... - تمكن المبيانات ، أحيانا من توضيح وضعية تراكيبية، مثلا لعد المصافحات بين ستة أطفال ننشئ مخططا من ستة رؤوس نربطها فيما بينها بأحرف. - الاستئناس بوضعيات إنشاء لمبيان يتم فيه المرور من كل حرف من أحرفه مرة واحدة بالضبط، وبدون رفع القلم، تخمين إمكانية إنجاز ذلك الإنشاء. - نكتفي بالتحقق من مبرهنة Euler في عدة أمثلة. - سيتم التطرق في مستوى السنة الثالثة للصيغة الثانية من مبدأDirichlet. - ربط تمثيلات المجسمات الاعتيادية كالمكعب ورباعي الوجوه بمبيان مناسب، انظر مثلاً حالتي رباعي الوجوه والمكعب:

المستوى	المحتوى	توجيهات
السنة ثالثة إعدادي	• **نظرية المبيانات (Théorie des graphes)** - يتم قبول علاقة Euler بالنسبة لكل مبيان مترابط connexe (مبيان بحيث، بين كل رأسين من رؤوسه، يوجد "طريق" يربط بينهما). بتعويض F عدد الوجوه في حالة المجسمات، ب R الجهات في المبيان ، تصبح صيغة Euler بالنسبة لمبيان مترابط R+S- A=2 - تطبيق مبرهنة Euler من أجل تعداد الجهات. • **أنشطة في التعداد** - تناول أنماط الاستدلالات سواء في وضعيات التعداد المنظم باستعمال قاعدتي الجمع أو قاعدة الجداء أو هما معاً. - تعرف واستعمال صيغة التضمن والاستثناء (inclusion- exclusion) - استعمال تقنية العد المزدوج double comptage • **مبدأ Dirichlet** - تعرف واستعمال مبدأ Dirichlet للبرهنة على وجود حل، على الأقل، للمشكلة المطروحة. ويتم تناوله وفق الصيغتين : أ) إذا وضعنا n+1 كرة في n صندوق (بدون أن يبقى أي صندوق فارغا) فإن صندوقا واحدا على الأقل سيحتوي كرتين ب) إذا وضعنا $(q \times s) + 1$ كرة في صناديق عددها s (بدون أن يبقى أي صندوق فارغا) فإن صندوقا واحدا على الأقل سيحتوي أكثر من q كرة. - استثمار مبدأ Dirichlet لدراسة بعض الوضعيات التي تتم صياغتها بواسطة مبيان بسيط.	- يتحقق المتعلم(ة) من هذه النتيجة بالنسبة للمجسمين والمبيانين المناسبين لهما  - يتم التذكير بالصيغة البسيطة (1) لمبدأ Dirichlet ثم التناول التدريجي للصيغة (2)، واستعمالها في حل طيف شاسع من الوضعيات من مجالات مختلفة بين جبر وهندسة وحسابيات.

3- أمثلة لوضعيات تستهدف تنمية القدرات المنتظرة

دعماً للتوجه القاضي باستعمال عدد محدود من المعارف الجديدة، كما بيننا في التوجيهات المنهجية، نقدم فيما يلي بعض المفاهيم والتقنيات البسيطة التي قد تكون أداة فعالة لحل فئة من مشكلات التراكيب.

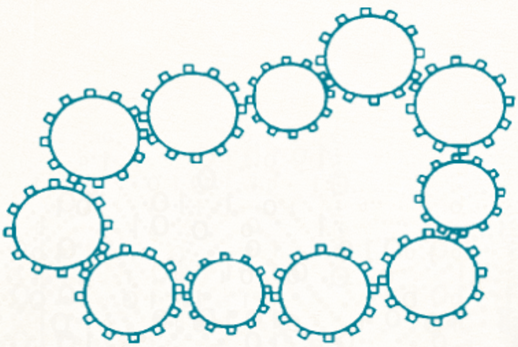
تقنية الزوجية والتناوب La parité et l'alternance

هل يمكن ترصيف لوحة من فئة 5x5 بواسطة قطع مستطيلة من فئة 1x2؟

جواب: إذا اعتبرنا الوحدة كل مربع من فئة 1x1 فإن من الواضح أن عملية الترصيف غير ممكنة لأن أي عدد من القطع من فئة 1x2 سيكون عددا زوجيا بالنسبة للوحدة 1x1 بينما عدد تلك القطع في اللوحة 5x5 هو عدد فردي.

يبين الشكل التالي 11 قطعة متشابكة فيما بينها. هل يمكن لهذه القطع أن تدور كلها تآنيا؟

جواب: لا يمكن أن تدور القطع كلها تآنيا لأن دوران القطعة الأولى والقطعة الأخيرة في المجموعة المترابطة، ستدوران في نفس المنحى. وهذا غير ممكن لأن كل قطعتين متحاذيتين تدوران في منحيين مختلفين. إذا كان D يرمز لدوران قطعة جهة اليمين و G يرمز للدوران جهة الشمال. سنحصل، مثلا، على المتتالية D- G- D- G- D- G- D- G- D- G- D



ملاحظة. يمكن لفت انتباه التلاميذ إلى الحالة العامة التي يكون فيها عدد القطع فرديا، وإدراكهم لطبيعة **تناوب** الدوران باعتبارها فكرة أساسية وراء الحل.

بيّن أن عدد التحركات، على رقعة الشطرنج، اللازمة لفارس لكي ينطلق من الخانة A1 ويعود إليها بعد ذلك، سوف يكون عدداً زوجياً.

جواب: لنجد العنصر المتناوب في هذه الوضعية، بحسب الفكرة الواردة في المثال أعلاه. يتحرك الفارس على رقعة الشطرنج بخانتين أفقيتين وخانة واحدة عمودية أو العكس أي وفق الحرف اللاتيني L (أو مقلوبه)، إذن في كل حركة سيتناوب **لونا** خانتي الانطلاق والوصول. وبما أن الفارس سيعود لخانة الانطلاق، فإن لون الانطلاق ولون الوصول متطابقين، إذن حتماً سيكون عدد تحركات الفارس زوجياً.

هل يمكن لفارس أن يتحرك انطلاقاً من الخانة A1 نحو الخانة H8، مروراً بكل خانة من الخانات المتبقية مرة واحدة بالضبط؟

جواب: لا يمكنه ذلك لأن عليه المرور من 63 خانة (عدد فردي). نظراً لأن الخانتين A1 و H8 لهما نفس اللون (monochromatiques). تم توظيف تقنية **التناوب والزوجية** مرة أخرى.

تشكل فاطمة حلقة دائرية من كريات صفراء وزرقاء. إذا علمت أن الحلقة تحتوي على 5 كريات زرقاء، وأن كل كرية تجاورها كريتان من نفس اللون، فما عدد الكريات الصفراء؟

جواب: نلاحظ بأنه لا يمكن أن يتواجد في الحلقة كريتان من نفس اللون جنبا إلى جنب، إذن حتما سيكون تناوب بين اللونين، إذن عدد الكريات الصفراء يساوي 5 :

B- J- B- J- B- J- B- J- B- J

قاعدة. كل تجميعة مكونة من صنفين من العناصر، يكون عددا العناصر من كل صنف متساويين إذا كانت مغلقة ومتناوبة.

هل يمكن رسم خط مغلق بواسطة 9 قطع مستقيمة شريطة أن تقطع كل واحدة بقية القطع الأخرى مرة واحدة؟
جواب: لا يمكن، لأنه إذا افترضنا عكس ذلك، فإن مجموعة القطع يمكن تجزيئها إلى ثنائيات مكونة من قطعتين لهما نقطة مشتركة، ومنه يصبح عدد القطع زوجيا وهذا غير صحيح.
قاعدة. إذا كان بالإمكان تجزيئ مجموعة عناصر إلى ثنائيات فإن عدد عناصر المجموعة زوجي.

هل يمكن ترصيف مضلع محدب مكون من 13 رأس بواسطة قطع، بحيث يكون لكل قطعة منها شكل متوازي أضلاع؟

تتكون إحدى العملات المالية من قطع قيمتها 1،3 و5 وحدات مالية. هل يمكن تشكيل مبلغ 25 وحدة مالية باستعمال 10 قطع، بالضبط، من هذه العملة؟

نكتب على ورقة، لائحة الأعداد : $1,2,3,\dots,2021$.
نعتبر العملية الآتية: نختار عشوائياً عددين a , b و نعوضهما ب $5a-2b$ و$3a-4b$ هل يمكن الحصول، بتطبيق هذه العملية عددا منتهيا من المرات، على الأعداد التالية $3, 6, 9, \dots, 6063$ ؟

يتكون عدد من سلسلة للرقمين0 و1 مثلاً 100010010. نقوم بمحو كل جزء "10" ونعوضه ب "0001" جرب العملية في المثال السابق. بين أن هذه العملية ستتوقف، بالنسبة للحالة العامة، في مرحلة ما.

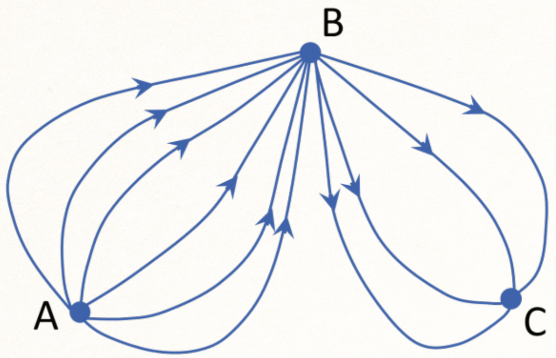
هل يمكن ملئ خانات شبكة تربيعية من فئة 5x5 بأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل سطر عدداً موجباً ويكون مجموع أعداد كل عمود عدداً سالباً؟
هذه وضعية لاستعمال طريقة (العد المزدوج) طبعا هذه العملية غير ممكنة لأن مجموع مجاميع الأسطر يساوي مجموع مجاميع الأعمدة.

صيغ العد: قاعدتي الجمع والجداء:

تربط ستة طرق بين المدينتين A وB، وأربعة طرق بين المدينتين B وC .

بكم من طريقة يمكن التنقل بين المدينتين A و C ؟

جواب: حسب قاعدة الجداء هناك 4x6=24 طريقة للتنقل بين المدينتين A و C.



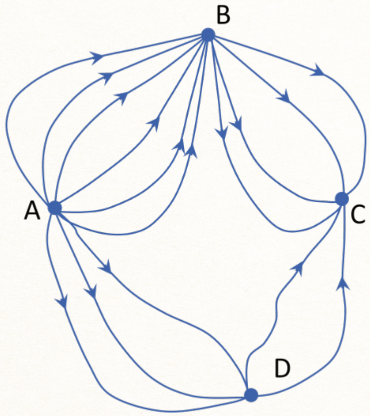
يوضح الشكل أربع مدن A وB وC وD والطرق التي تربط بينها.

بكم طريقة يمكننا التنقل من المدينة A نحو المدينة C ؟

جواب: لدينا إمكانيتين للتنقل بين المدينتين A و C،

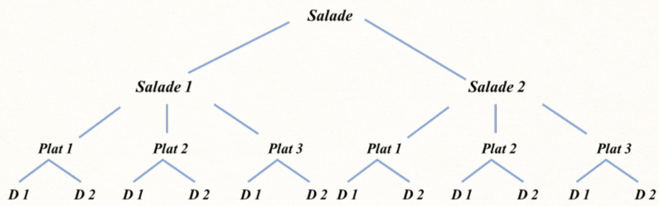
إما عبر المرور من المدينة B وإما بالمرور من المدينة D فيكون الحل الإجمالي:

- $2 \times 3 + 6 \times 4 = 30$



يوجد في بطاقة وجبات مطعم اختياران للمقبلات salades، و3 اختيارات في الوجبة الأساس، واختيارين في الطبق الثالث dessert. ما عدد الاختيارات لتناول وجبة كاملة بهذا المطعم؟

جواب: لدينا اختيارين في الطبق الأول و 3 اختيارات في الطبق الثاني إذن لدينا 3×2 وحيث أنه يوجد اختيارين للطبق الثالث، فإن العدد الإجمالي للاختيارات هو $12 = 2 \times 3 \times 2$. شجرة الاختيارات التالية توضح هذه الوضعية، الحرف Dيرمز لـ dessert .



كم عدد الإمكانيات لاحتلال الرتب الثلاث الأولى، عند نهاية الدور النهائي لإحدى مباريات أولمبياد الرياضيات شارك فيه عشرون متبارياً؟

جواب: هناك 20 متبارياً يمكنه احتلال المرتبة الأولى، سيبقى 19متبارياً يمكنه احتلال المرتبة الثانية و18 متبارياً بإمكانه احتلال المرتبة الثالثة. عدد الإمكانيات هو

$$20 \times 19 \times 18 = 6840$$

نريد عد عناصر المجموعة المكونة من الأعداد الصحيحة الطبيعية الأصغر من أو تساوي 1000000 علما أنها قابلة للقسمة على 2 أو على 3 أو عليهما معاً.

جواب: لتكن D2 مجموعة الأعداد القابلة للقسمة على 2 و D3 مجموعة الأعداد القابلة للقسمة على 3. لدينا حسب الصيغة:

$$\#(D3 \cup D2) = \#(D2) + \#(D3) - \#(D3 \cap D2)$$

الرمز $\#(D)$ يعني عدد عناصر D يقرأ (cardinal de D).

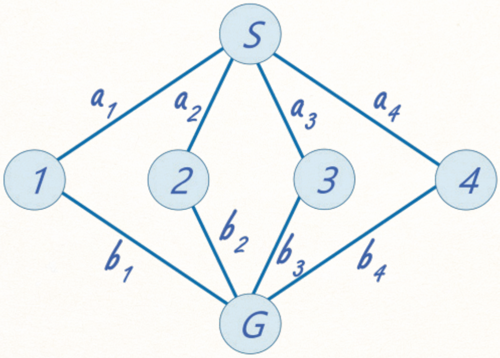
لدينا $\#(D2) = 500000$ و $\#(D3) = 333333$

$\#(D3 \cap D2) = 166666$ ، $D3 \cap D2$ هي مجموعة الأعداد القابلة للقسمة على 6

العدد هو إذن $500000 + 333333 - 166666 = 666667$

يبين الشكل رفقته، عدد الطرق التي يمكن سلوكها للتنقل من المدينة S نحو المدينة G ، لدينا إمكانية المرور عبر أربع قناطر (1), (2), (3), (4) كل قنطرة يربطها بالمدينة S طرق عددها a_1, a_2, a_3, a_4 و يربطها بالمدينة G طرق عددها b_1, b_2, b_3, b_4.

ما العدد الإجمالي لإمكانيات التنقل بين S و G ؟



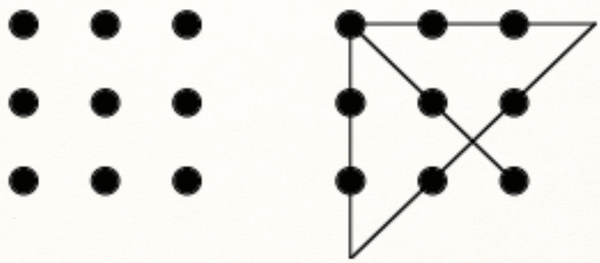
جواب: ينبغي أن يدرك التلميذ أهمية استعمال خطاطة في وضعيات مماثلة، إذ نطبق قاعدة الجداء أولا باستعمال القنطرة (1) فنجد عدد الإمكانيات يساوي a_1b_1 ، ثم نستعمل القاعدة نفسها بالنسبة للقنطرة (2) فنجد a_2b_2، ونستعمل الاستدلال نفسه بالنسبة للقنطرتين (3) و (4) نجد a_3b_3 و a_4b_4 وبالتالي فإن العدد الإجمالي يساوي $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$.

4- أمثلة إضافية في التراكيب من أجل الاستئناس بمضامين المقرر الأولمبي

1.4- تطبيقات حول مبدأ Dirichlet

- من بين ثلاث قطط، قطتان على الأقل لهما نفس الجنس.
- من بين 13 تلميذا اثنين على الأقل ازدادا في الشهر نفسه.
- ما العدد اللازم لأشخاص بحيث يكون، بكل تأكيد، لاثنين منهم نفس تاريخ الميلاد؟
- برهن أن كل مستقيم في المستوى، لا يمر من أي رأس من رؤوس مثلث، لا يمكنه أن يقطع جميع أضلاع هذا المثلث.

1) نصل بين تسع نقط من شبكة تربيعية (3x3) بأربع قطع مستقيمة بدون رفع القلم (انظر الشكل أسفله). صل 16 نقطة من شبكة تربيعية(4x4) **بخمس** قطع مستقيمة، بدون رفع القلم.



<u>إرشاد. نوجه التلاميذ للمثابرة من أجل إيجاد حلول مبتكرة، والتفكير بطرق غير مألوفة.</u>

2.4- أمثلة لاستعمال نظرية المبيانات

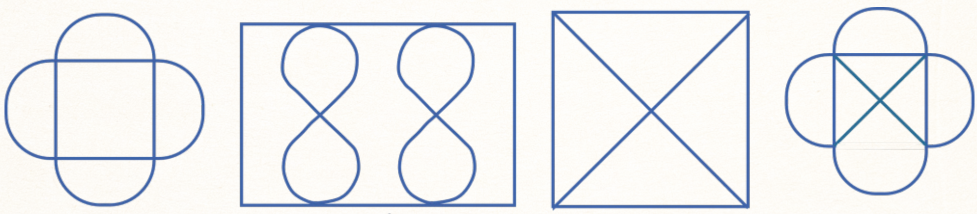
1) تصافح مجموعة من التلاميذ، عددهم n، فيما بينهم مثنى مثنى. ما العدد الإجمالي للمصافحات؟

جواب: كل تلميذ من المجموعة سيصافح جميع أصدقائه أي (n- 1) تلميذا وبالتالي سيكون لدينا n(n- 1) حسب القاعدة السابقة، وتفاديا لتكرار احتساب كل مصافحة مرتين يكون العدد الإجمالي $\frac{n(n-1)}{2}$.

2) هل من الممكن أن نربط 5 مدن بواسطة طرق بحيث تصل كل مدينة مع ثلاثة مدن أخرى؟

جواب: لا يمكن ذلك لأننا نعلم بأن مجموع درجات رؤوس المبيان عدد زوجي وهو الشرط الذي لا يتحقق في هذه الحالة، لأن هذا المجموع يساوي 15.

3) ارسم إذا كان ذلك ممكنا كل مبيان (a) , (b) , (c) , (d) بدون رفع القلم .(يمكن أولاً، التحقق من الجواب باستعمال خاصيات درجات الرؤوس)



(a) (b) (c) (d)

3.4- استكشاف أنماط وعلاقات ناظمة للبنية المنطقية

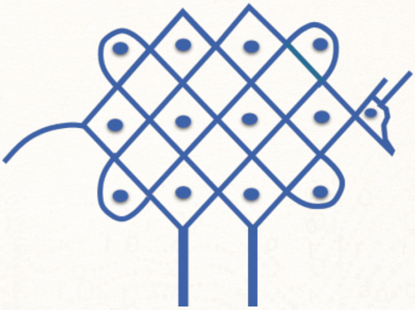
1) نكتب، في خانات الشبكة التربيعية التالية، جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.

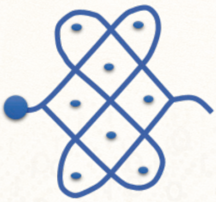
حدّد قسمة العددين في الخانتين أقصى يمين ويسار السطر المائة من الجدول

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
...	...	...	...	...	...	...	...	...

2) تحتوي كل خانة من خانات شبكة تربيعية من فئة 9×9 على عدد موجب. إذا علمت أن مجموع أعداد كل سطرين متحاذيين يساوي على الأقل 20 وبأن مجموع أعداد كل عمودين متحاذيين يساوي على الأكثر 16 فما القيم الممكنة لمجموع جميع أعداد هذه الشبكة؟

3) أحط نقط الشبكة، في كل حالة من الحالتين التاليتين، بدون رفع القلم.





4.4- تقنية التلوين

يعتبر استعمال التلوين من المهارات الهامة في الاستدلال التراكيبي والتي ينبغي الاستئناس باستعمالها عبر حل وضعيات متعددة، أنظر نموذج رقعة الشطرنج في نشاط سابق، نورد فيما يلي أمثلة أخرى على ذلك.

1) نحذف من رقعة شطرنج الخانة أقصى اليمين في السطر الأول والخانة أقصى اليسار في السطر الأخير. بيّن أنه لايمكن ترصيفها بواسطة قطع domino من مربعين (كل مربع بحجم خانة من خانات الرقعة).

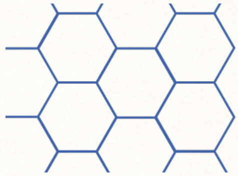
جواب: الخانتين التي تم حذفهما لهما نفس اللون (الأبيض مثلاً)، إذن يبقى لنا 32 خانة لونها أسود و 30 خانة لونها أبيض. وحيث أن لوني خانتي "الدومينو" مختلفين فإن هذا الترصيف سيكون مستحيلاً.

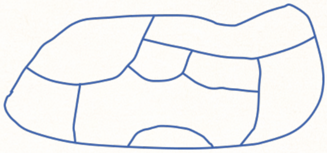
2) ما هو أكبر عدد من الألوان المختلفة التي يمكن بها تلوين كل خانة من خانات شبكة تربيعية من فئة 3×3 بحيث لايكون لأي خانتين متحاذيتين نفس اللون؟

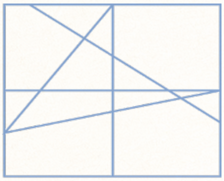
جواب: ليكن n عدد هذه الألوان. يمكن تلوين خانة ب n لون يبقى إذن $(n-1)$ اختيارا وبالتالي يصبح العدد الإجمالي $\frac{n(n-1)}{2}$ وباعتبار شروط المسألة نجد $\frac{n(n-1)}{2} \leq$ 12 إذن $n \leq 5$ وفعلاً n=5 كما يوضح الجدول

1	2	4
3	5	1
4	2	3

3) ما هو أقل عدد الألوان التي يمكن بها تلوين كل جهات كل شكل من الأشكال الآتية؟ علماً أن كل جهتين متحاذيتين مختلفتي اللون.







5.4- استراتيجيات اللعب

1) لعبة Tic- tac- Toe

يبدأ أحد اللاعبين بوضع علامته ثم يليه اللاعب الثاني، يحاول كل واحد من اللاعبين التفكير في موقع خانة وضع العلامة الخاصة به وتطبيق استراتيجية ناجحة للفوز بعد الإتمام لسطر أو عمود أو قطر (كامل) بالقطع الخاصة به قبل اللاعب الآخر. (ينبغي توجيه التلاميذ إلى إجراء دورات لعب متتالية باتباع قواعد اللعبة).

يمكن الحصول على التشكيلات الأساسية التالية (بدون احتساب تلك التي نحصل عليها انطلاقاً من هذه الجداول الستة بدوران أو تماثل).

A

x	x	x
x	o	o
x	o	o

B

x	x	x
o	x	o
o	o	x

C

x	x	x
o	x	o
o	x	o

D

o	x	o
x	x	x
o	x	o

E

x	o	o
x	x	x
o	o	x

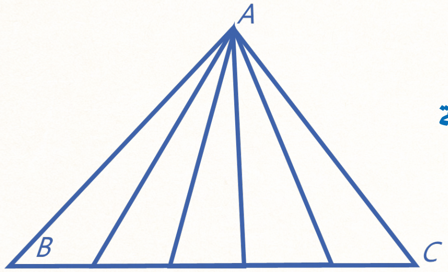
F

x	o	x
o	x	o
x	o	x

2) يضع شخصان بالتناوب بينهما قطعة نقدية من فئة درهم واحد، على محيط مائدة مستديرة. يخسر في هذه اللعبة من لا يجد مكاناً لوضع قطعة النقود. صف استراتيجية رابحة.

جواب: عندما يضع اللاعب الأول قطعة النقود الأولى يلجأ اللاعب الثاني لوضع القطعة الثانية المقابلة قطريا للأولى، ويستمر في هذه الاستراتيجية حتى يتم ملئ محيط المائدة فيخسر اللاعب الأول. (مركز دائرة هو مركز تماثل لها)

6.4- وضعيات في الهندسة التراكيبية



1)ما عدد المثلثات في التشكيلة الهندسية جانبه؟

2) ما العدد القصوي لنقط تقاطع n مستقيما في المستوى؟

3) ما العدد القصوي لجهات المستوى المحددة ب n مستقيما في المستوى؟

4) ما العدد القصوي لجهات المستوى المحددة ب n مربعا / مثلثا؟

5) كم عدد أقطار أضلاع مضلع محدب عدد رؤوسه n ؟

7.4- وضعيات حول تطبيق مبدأ ديريكلي

1) نفترض أن جميع نقط المستوى ملونة بلونين أحمر وأخضر. بين أنه توجد نقطتين من نفس اللون تكون المسافة بينهما تساوي 2021.

جواب: ننشئ مثلثاً متساوي الأضلاع قياس ضلعه 2021، باستعمال مبدأ ديريكلي على رؤوس هذا المثلث، حتما سيكون لرأسين نفس اللون.

2) هل يمكن تغطية recouvrement مثلث ABC متساوي الأضلاع بمثلثين متساويي الأضلاع قياسا ضلعيهما أصغر من قياس ضلع المثلث ABC ؟

جواب: لايمكن ذلك لأن كل مثلث سيمكن من تغطية رأس واحدة من رؤوس المثلث ABC .

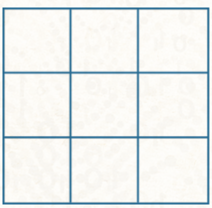
3) هل يمكن ملئ خانات شبكة تربيعية من فئة 6x6 بالأعداد 1- ,0 و 1 بحيث يكون مجموع كل سطر وعمود وقطريه أعداداً مختلفة؟

جواب: يوجد في المجموع 14 بين عمد وسطر وقطرين. ومن جهة ثانية فمجاميع كل سطر أو عمود أو قطر هي أعداد أكبرها 6 وأصغرها 6- إذا عدد القيم المختلفة لهذه المجاميع هو 13 إذن ليس لكل سطر و عمود و قطر مجاميع مختلفة.

4) يتوفر أحمد على مجموعة من الجوارب من ستة ألوان، سحب أحمد في الظلام مجموعة من الجوارب، علماً أن الجوارب متطابقة لايمكن التمييز بينها سوى باللون، فكم عدد الجوارب، على الأقل، التي سيسحبها أحمد ليكون متأكداً من حصوله على أربع أزواج جوارب من نفس اللون؟

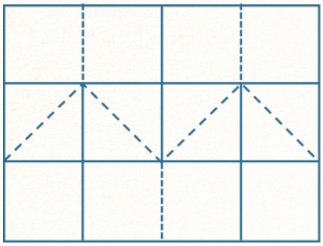
5) ننشئ 10 نقط داخل الشبكة التربيعية التالية.

أ - بيِّن أنه توجد نقطتين من بين النقط العشر تكون المسافة بينهما أصغر من 0,48 .



ب- بيِّن أن ثلاث نقط من بين النقط العشر توجد داخل قرص شعاعه 0,5.

6) ننشئ 6 نقط في شبكة مستطيلة 4×3 ، مقسمة إلى 5 جهات، كما يوضح الشكل التالي:



بيِّن أنه توجد نقطتين من بين النقط الست تكون مسافتها أصغر من $\sqrt{5}$

Bibliographie مراجع بيلوغرافية

- Arseniy Akopyan, Geometry in figures, edition 2011

- M.A Ekimova & all, Problèmes de découpage, MCNMO Moscow 2002

-A. B. Farkov, Mathematical Olympiad Preparation (5-8), Moscow 2012.

-Dimitry Fomin & all, Mathematical circles, AMS 1996.

-N.Vilenkin, Combinatorial Mathematics for Recreation, Mir Pulishers 1972.

-M. I Zaikin, Mathematical training, Moscow 1996.

-Paul Vaderlind & all, The Inquisitive Problem Solver, MAA 2002.

-B.A Kordemsky & all, Amzing World of Numbers, Moscow 1986.

-H. L Semendyaeva & all, Olympiad Number Theory 5-7, Knowledge Lab 2020.

اللجنة المركزية للأولمبياد الوطنية في الرياضيات

الاباوي محمد	مفتش تربوي الدرجة الممتازة	منسق فريق العمل لإعداد هذا الكتيب
أنجمة جمال	أستاذ مبرز	عضو فريق العمل لإعداد هذا الكتيب
أسنسوييس حسن	أستاذ جامعي	عضو فريق العمل لإعداد هذا الكتيب
الدحموني محمد	أستاذ مبرز	عضو فريق العمل لإعداد هذا الكتيب
الدراز عبد الكريم	أستاذ مبرز	عضو فريق العمل لإعداد هذا الكتيب
الصامت محمود	أستاذ مبرز	عضو فريق العمل لإعداد هذا الكتيب
عشاق عبد الرحمان	مفتش تربوي الدرجة الممتازة	عضو فريق العمل لإعداد هذا الكتيب
مصباح جواد	مفتش تربوي الدرجة الممتازة	عضو فريق العمل لإعداد هذا الكتيب
زريوال عبد اللطيف	مفتش تربوي الدرجة الممتازة	عضو فريق العمل لإعداد هذا الكتيب

ممثلو الأكاديميات الجهوية للتربية والتكوين *

أضرضور محمد	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة سوس ماسة
الحوتة عبد اللطيف	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة مراكش آسفي
المنصاري مصطفى	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة الشرق
النسائي السعدية	مفتشة مكلفة بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة الرباط سلا القنيطرة
أمخزون لحسن	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة فاس مكناس
بوكداش عبد السلام	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة الدار البيضاء سطات
بوليد الحسن	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة كلميم واد نون
شوكارة حسن	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة طنجة تطوان الحسيمة
فصيح أحمد	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة العيون الساقية الحمراء
موجان نجيم	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة درعة تافيلالت
نابل سي محمد	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة بني ملال خنيفرة

* مفتشو مادة الرياضيات المشاركين في ندوة 08 أكتوبر 2019 حول مشروع إرساء الأولمبياد الجهوية في الرياضيات.

ممثلو الأكاديميات الجهوية للتربية والتكوين *

حريزي توفيق أحمد	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة سوس ماسة
المنصاري مصطفى	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة الشرق
النسائي السعدية	مفتشة مكلفة بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة الرباط سلا القنيطرة
الحمويي عزوز	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة فاس مكناس
بوكداش عبد السلام	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة الدار البيضاء سطات
الزغداني محمد	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة كلميم واد نون
شوكارة حسن	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة طنجة تطوان الحسيمة
فصيح أحمد	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة العيون الساقية الحمراء
موجان نجيم	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة درعة تافيلالت
نابل سي محمد	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة بني ملال خنيفرة
سكراتي عبد الغني	مفتش مكلف بالتنسيق الجهوي التخصصي	جهة الداخلة وادي الذهب

* مفتشو مادة الرياضيات المشاركين في ندوة 27 و28 أكتوبر 2021 حول تدقيق مشروع المقرر الأولمبي في الرياضيات بسلك الثانوي الإعدادي.

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
Royaume du Maroc

وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⵏⵏⵉⵜ